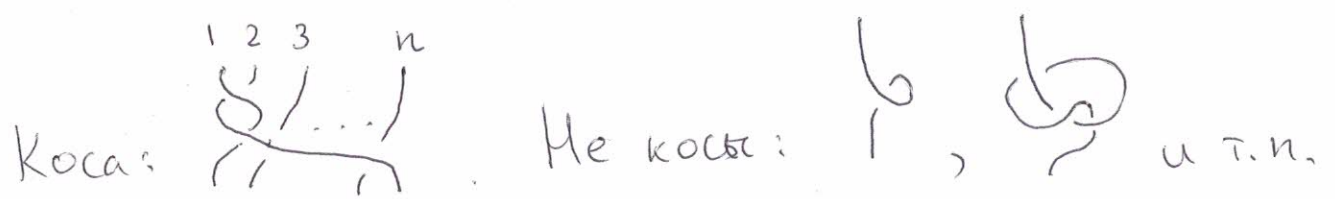


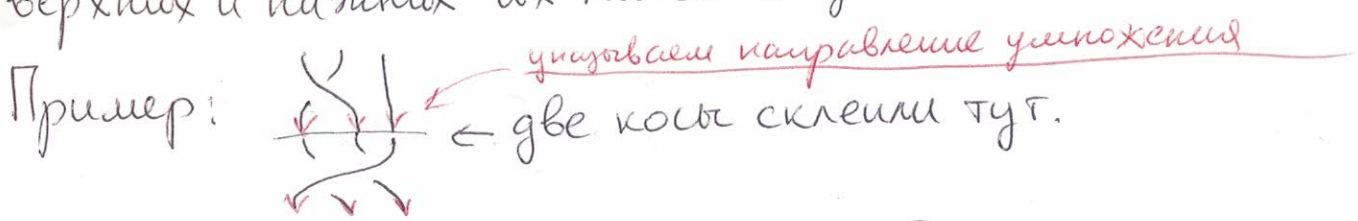
Группа кос

§ 1. Геометрическое представление

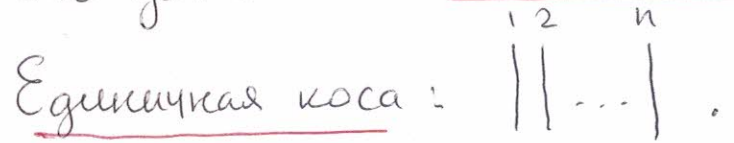
Интуитивно n -коса — это набор из n переплетённых между собой пронумерованных нитей. При этом нити не разрешается завязывать в узлы. Примеры:



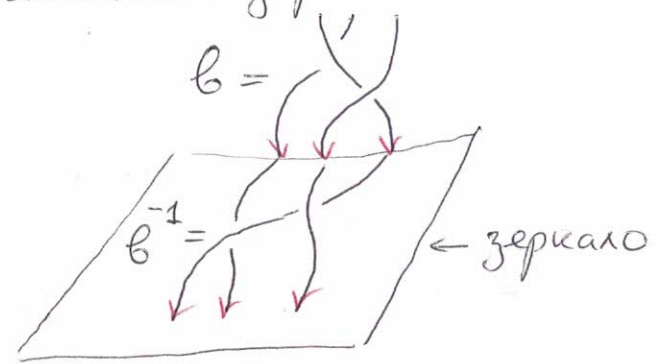
Умножение двух кос происходит путем "склеивания" верхних и нижних их нитей с одинаковыми номерами.



Это умножение ассоциативно и обратимо.



Обратная коса получается отражением исходной в лежащем горизонтально зеркале:



Итак, n -косы образуют группу.

(2')

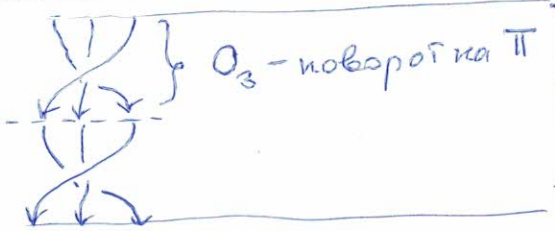
Рассмотрим простейшие примеры:

При $n=1$ группа тривиальна

При $n=2$ — это бесконечная циклическая группа \mathbb{Z}_2

При $n=3$ — это бесконечная неабелева группа.

Она имеет нетривиальный центр, порожденный элементом

$Z_3 := O_3^2 =$  } O_3 — поворот на π } Z_3 — поворот на 2π !

Мы наклеиваем тривиальную косу на ленточку и закручиваем нижний конец косы на 2π .

Замечание:

В общем случае группа n -кос ее центр является
бесконечной циклической группой, порожденной элементом

тогда $Z_n = O_n^2$ / Wei-Liang Chow, Annals of Math., Vol. 49
no. 3, p.p. 654-658, 1947/

Фактор-группа группы 3-кос по ее центру изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{Z})$ преобразований комплексной плоскости \mathbb{C} вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ и } ad-bc=1$$

$PSL_2(\mathbb{Z})$ является модулярной группой.

В свою очередь, $PSL_2(\mathbb{Z})$ является фактор-группой группы целочисленных 2×2 матриц с единичным определителем:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ — по ее

центру: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Нетрудно убедиться, что $SL_2(\mathbb{Z})$ порождается (3)

парой матриц:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, произвольная $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ при умножении B_1^k или B_2^l справа принимает вид:

$$\begin{pmatrix} a & ak+b \\ c & ck+d \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a-lb & b \\ c-lc & d \end{pmatrix}$$

Следовательно, последовательным умножением A справа на подходящие степени B_1 и B_2 можно первую строку результирующей матрицы \tilde{A} привести к виду $(1, 0)$ или $(0, 1)$ (алгоритм Евклида). В силу условия $\det A = 1$ мы

получим:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & n \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

\parallel
 B_2^{-m}
 \parallel
 $D := B_1 B_2$
 \parallel
 B_1^{n-1}

\square

Заметим, что $SL_2(\mathbb{Z})$ порождается B_1 и B_2 не свободно, т.к. имеется соотношение

$$C := B_1 B_2 B_1 = B_2 B_1 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ порождает центр $SL_2(\mathbb{Z})$.

Заметим также, что $PSL_2(\mathbb{Z})$ можно породить матрицами $C := B_1 B_2 B_1$ и $D := B_1 B_2$, которые удовлетворяют условию

$$C^2 = D^3 = \text{Id} \quad (\text{в } PSL_2(\mathbb{Z}))$$

$PSL_2(\mathbb{Z})$ - свободное произведение двух циклических групп

$$PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

(4)

Дадим формально строгое определение группы кос:

Def 1 Конфигурационное пространство

$$\mathcal{P}_n := \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \forall i \neq j \}$$

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{P}_n / S_n$$

Здесь S_n — симметрическая группа, которая действует на наборах (z_1, z_2, \dots, z_n) перестановками компонент.

Иными словами \mathcal{P}_n — пространство упорядоченных наборов из n попарно различных точек на плоскости (комплексная структура нам не важна)

\mathcal{B}_n — пространство неупорядоченных таких наборов.

Def 2 Классическая группа кос (braid group)

это фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{B}_n)$

Группа чистых кос (pure braid group)

— это фундаментальная группа

$$\pi_1(\mathcal{P}_n).$$

Поскольку конфигурационные пространства линейно связны, фундаментальные группы одинаковы для всех точек этих многообразий

5

Нарисуем типичный элемент группы $\pi_1(P_n)$ для точки $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (1, 2, \dots, n)$:

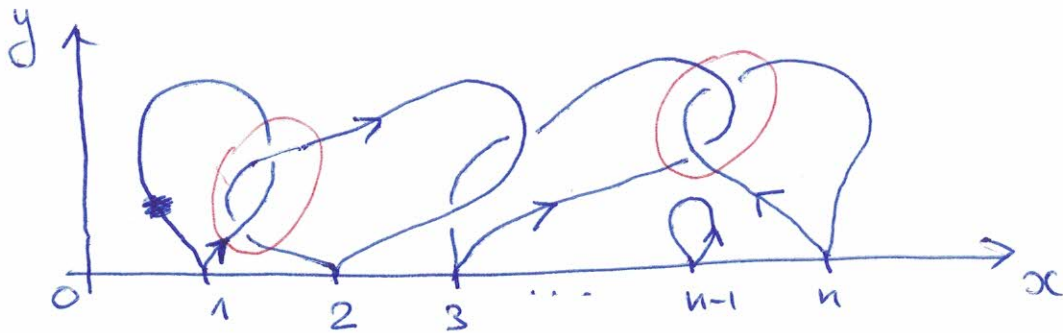


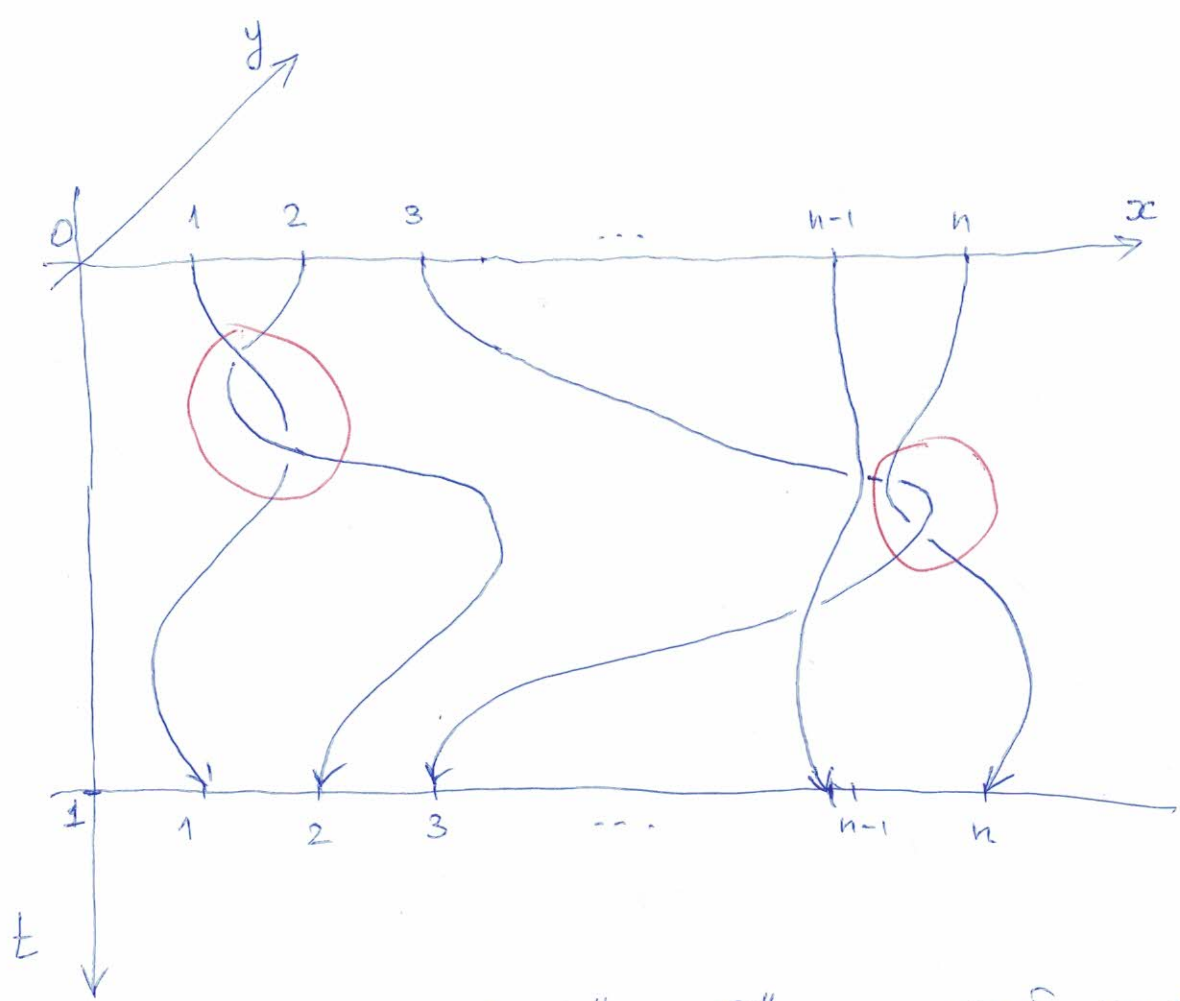
Рис. 1

Из каждой точки $i=1, 2, \dots, n$ стартует петля $z_i(t) : z_i(0) = z_i(1) = i$. Стрелка на петле указывает направление движения вдоль петли при увеличении t .

Условие $z_i(t) \neq z_j(t) \forall i \neq j$ порождает правило рисования пересечений петель: ~~встречаются~~ если $z_i(t_1) = z_j(t_2) = z_0$, то рисуем , если $t_1 > t_2$

и , если $t_1 < t_2$. Более поздняя линия накрывает более раннюю, как если бы мы их рисовали палочками на песке. При этом оказывается, что петли $z_1(t)$ и $z_2(t)$ на Рис. 1 никаким образом нельзя расцепить и стекнуть в точку, не нарушив правила $z_1(t) \neq z_2(t)$. Петли $z_2(t)$ и $z_3(t)$ на Рис. 1, расцепляются.



Для более наглядного представления картинки зацепления петель представим их в расширенном конфигурационном пространстве $\mathbb{C} \times [0, 1]$ параметр t



Наложение траекторий — "нитей" — на этой картинке выглядит не совсем так, как на Рис 1 (наложение нитей зависит от выбора проекции), но нерасцеленные — те же (обведены красным).

Получилась картинка красочной косы. Все ее нити начинаются и кончаются в точках с одинаковыми координатами: $z_i(0) = z_i(1) \neq i$.

У обобщенных кос ($\in \pi_1(B_n)$) начала и концы нитей могут переставляться.

Заметим, что однозначность проекции петель $\xi_i(t)$ на ось параметра t исключает возможные картинкой вида  или .

Очевидно, группа краевых кос $\pi_1(\mathcal{P}_n)$ является подгруппой группы кос $\pi_1(\mathcal{B}_n)$.

Как нетрудно убедиться, эта подгруппа нормальна.

Действительно, всякой косе

$$v = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \in \pi_1(\mathcal{B}_n)$$

можно сопоставить элемент группы перестановок S_n :

$$v \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} z_1(0)=1, & z_2(0)=2, & \dots, & z_n(0)=n \\ z_1(1), & z_2(1), & \dots, & z_n(1) \end{pmatrix}$$

На картинках такое сопоставление означает, что кос "забываем", какая нить снизу, а какая сверху при их пересечении:

$$v = \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array}$$

Это сопоставление является гомоморфизмом группы: $\pi_1(\mathcal{B}_n) \xrightarrow{\delta_n} S_n$. Точнее, эпиморфизм:

$$\text{Im}_{\delta_n}(\pi_1(\mathcal{B}_n)) = S_n.$$

Очевидно, подгруппа краевых кос $\pi_1(\mathcal{P}_n)$ лежит в ядре этого гомоморфизма. Более того;

$$\boxed{\pi_1(\mathcal{F}_n) = \text{Ker } \delta_n}$$

8

а значит, $\pi_1(\mathcal{F}_n)$ - нормальная подгруппа, и

$$\boxed{S_n = \pi_1(\mathcal{B}_n) / \pi_1(\mathcal{F}_n)} \quad (*)$$

Формулу факторизации (*) можно представить в виде короткой точкой последовательности группы:

$$\boxed{1 \xrightarrow{\delta_n^{(0)}} \pi_1(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\delta_n^{(1)}} \pi_1(\mathcal{B}_n) \xrightarrow{\delta_n^{(2)}} S_n \xrightarrow{\delta_n^{(3)}} 1}$$

Здесь $\delta_n^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, - последовательность гомоморфизмов группы, причём

$$\boxed{\text{Im } \delta_n^{(i)} = \text{Ker } \delta_n^{(i+1)}} \quad (\text{точная последовательность})$$

- * $\delta_n^{(0)}$ - вложение подгруппы $\pi_1(\mathcal{F}_n)$ в группу $\pi_1(\mathcal{B}_n)$ - мономорфизм (т.е. $\text{Im } \delta_n^{(0)} = \pi_1(\mathcal{F}_n) = \text{Ker } \delta_n^{(1)}$)
- * $\delta_n^{(2)}$ - факторизация $\pi_1(\mathcal{B}_n)$ по нормальной подгруппе $\pi_1(\mathcal{F}_n)$ - эпиморфизм (т.е. $\text{Im } \delta_n^{(2)} = \text{Ker } \delta_n^{(3)} = S_n$)

§2 Алгебраическое представление
(Emil Artin, 1925)

Рассмотрим набор букв $v_i, i=1 \dots n-1$.

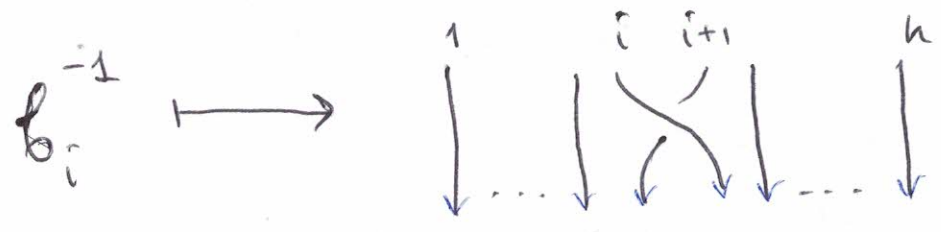
Будем считать, что этот набор букв порождает группу

То есть у каждой v_i есть обратная v_i^{-1} (вообще говоря, это новая буква), и есть единичная буква 1 :

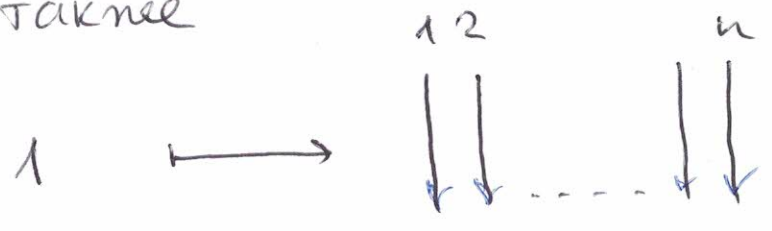
$$v_i v_i^{-1} = v_i^{-1} v_i = 1. \quad (1)$$

Порождаемая группа содержит всевозможные слова, составленные из букв $v_i^{\pm 1}$. Пока это свободная группа. Нам не интересуют более специальная ситуация: мог сопоставили буквам картинки

элементарных ^{мате}задачек из группы кос:



а также



Такое сопоставление уважает соотношения обратности (1):

$$v \cdot v^{-1} \rightarrow \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} \dots = \dots \downarrow \downarrow \dots = \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} \leftarrow v^{-1} \cdot v \quad (1a)$$

Потребуем, чтобы это сопоставление уважало и другие соотношения между элементарными заплетенными группами кос. Это приведет к условию:

$$v_i v_j = v_j v_i \quad \forall i, j : |i-j| > 1 \quad (2)$$

$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \quad (3)$$

Соотношения коммутативности (2) на уровне картинок очевидны. Соотношения (3) называются соотношениями кос (braid relations). На уровне картинок они выглядят так:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} = \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} \quad (3a)$$

Def 3 Группа, порождаемая генераторами $v_i^{\pm 1}$, $i=1, \dots, n-1$, удовлетворяющими соотношениям (1), (2), (3), называется артиковой группой кос B_n . v_i называются артиковыми генераторами B_n .

Комментарий к этому определению:

Задаче группы в терминах генераторов, т.е., набора букв: $\{v_1, v_2, \dots\}$, и соотношений, т.е., набора слов составленных из этих букв: $\{\omega_1 = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}, \omega_2, \dots\}$, означают, что мы определяем фактор-группу в свободной группе $F(v_1, v_2, \dots)$, порожденной генераторами $\{v_1, v_2, \dots\}$ по нормальному замыканию набора элементов $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, то есть по нормальной подгруппе, состоящей из всевозможных произведений элементов вида $x_1 \omega_1 x_1^{-1}, x_2 \omega_2 x_2^{-1}, \dots, \forall x_{1,2,\dots} \in F$.

В определении Def 3 словами ω являются:

$$\omega_{ij} = v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} \quad \forall i, j > 1$$

$$\sigma_i = v_i v_{i+1} v_i^{-1} v_{i+1}^{-1} v_i^{-1} v_{i+1}^{-1}$$

Замечание: Факторизация по их нормальному замыканию приводит к тому, что в фактор-группе образом всех этих элементов будет единица:

$$\omega_{ij} = \sigma_i = 1.$$

Соотношения (3) называются соотношениями кос (braid relations). (12)

Реш. Картики преобразований эквивалентности кос (1a) и (3a), соответственно, называются движениями Рейдемейстера 2 и 3 типов. Вместе с движениями 1-го типа: $\sigma =$ они позволяют любой две узловые диаграммы, отвечающие одному и тому же узлу, привести к одинаковому виду.

Сопоставление генераторам $v_i^{\pm 1}$ картинок элементарных зацеплений i -й и $(i+1)$ -й нитей косоз порождает гомоморфизм группы, обозначим его \hat{i}_n :

$$\boxed{B_n \xrightarrow{\hat{i}_n} \pi_1(B_n)}$$

Наша конечная цель в этом разделе: доказать, что \hat{i}_n — изоморфизм группы.

А пока сделаем отступление о различных способах задания B_n в терминах генераторов и соотношений. Число используемых при этом генераторов зависит от выбора способа задания.

Реализация B_n №2 Определим

n -цикл

$$C_n := v_1 v_2 \dots v_{n-1} \xrightarrow{i_n} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \diagdown & \diagup & \diagdown & \dots & \diagup \end{matrix}$$

Нетрудно убедиться, что с помощью этого элемента из элементарного заплетения v_1 можно породить все остальные

$$v_2 = C_n v_1 C_n^{-1}, \dots, v_{i+1} = (C_n)^i v_1 (C_n)^{-i} \quad (4)$$

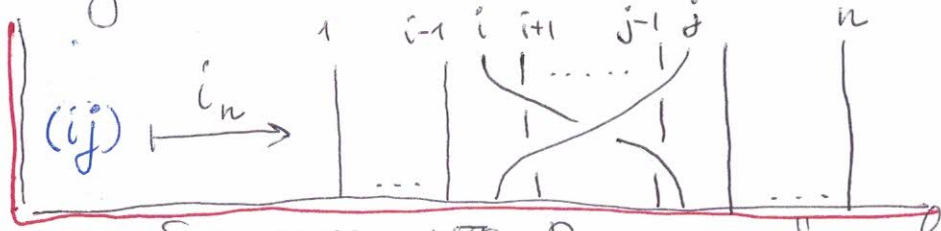
- Следовательно:
- а) все элементарные заплетения v_i в B_n взаимно сопряжены
 - б) B_n можно породить элементами $v_1^{\pm 1}$ и $C_n^{\pm 1}$.

Реализация B_n №3 (J. Birman, K.H. Ko, S.J. Lee
1998, Adv. Math. v. 139, p. 322-353)

Определим генераторы заплетения нитей i и j , $i < j$


$$(ij) := (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1}) v_i (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1})^{-1} \quad (5)$$

Очевидно $v_i v_{i+1} = v_i$. Картичка для v_{ij} :



Можно убедиться, что B_n задаётся в терминах генераторов $(ij)^{\pm 1}$, $1 \leq i < i \leq n$, и соотношений:

$$\begin{cases} (ij)(kl) = (kl)(ij) \quad \forall i, j, k, l : \begin{cases} i < j < k < l \text{ или} \\ k < i < j < l. \end{cases} \\ (ij)(ik) = (ik)(jk) = (jk)(ij) \quad \forall i < j < k \end{cases} \quad (6)$$

картинка этого оператора при гомоморфизме \hat{i}_n имеет вид:
 $\dots \overset{i}{\downarrow} \dots \overset{j}{\downarrow} \dots \overset{k}{\downarrow} \dots$


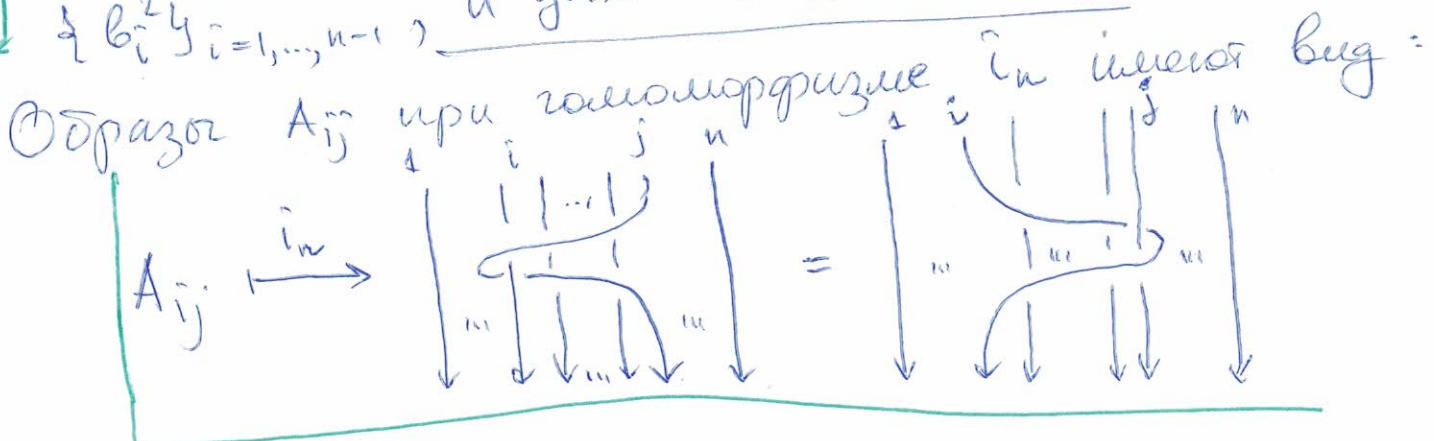
Реш: Заметим, что если соотношения для артиковых генераторов v_i - (2), (3) - симметричны, т.е. не меняют своего вида при прочтении справа-налево, то для генераторов v_{ij} это не так. Формулы

$$(ij)(jk) = (jk)(ik) = (ik)(ij), \quad i < j < k \quad \text{неверно}$$

Def 4: Артиковой группой краешек $\text{коэ } \mathcal{P}_n$ называется нормальная подгруппа B_n , получаемая нормальным замыканием набора элементов $\{A_{ij}^{\neq 1}\}_{1 \leq i < j \leq n}$

$$A_{ij} := (ij)^2 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n. \quad (7)$$

Реш: Из определения (5) элементов (ij) видно, что \mathcal{P}_n можно получать нормальным замыканием набора $\{v_i^2\}_{i=1, \dots, n-1}$ и даже $\{v_{ij}^2\}$ (см. (4)).



Утверждение 1 | Артикова группа краевых кос \mathcal{P}_n порождается набором $\{A_{ij}^{\pm 1}\}_{1 \leq i < j \leq n}$

Док-во: Мы проведем рассуждения для первого нетривиального случая \mathcal{P}_3 . Рассуждения для случая $\mathcal{P}_n, n > 3$, являются прямым обобщением случая \mathcal{P}_3 .

Итак, как надо убедиться, что сопряжение элементов $A_{12}, A_{13}, A_{23} \in \mathcal{P}_3$ артиковыми генераторами $b_{1,2}^{\pm 1} \in \mathcal{B}_3$ выражается в виде мономиа от A_{12}, A_{13}, A_{23} . Очевидно,

имеем:

$$b_{12}^{\pm 1} A_{12} b_1^{\mp 1} = A_{12}, \quad b_2^{\pm 1} A_{23} b_2^{\mp 1} = A_{23},$$

$$b_2 A_{12} b_2^{-1} =: A_{13} \Leftrightarrow b_2^{-1} A_{13} b_2 = A_{12}$$

Преобразуем выражение для A_{13} (сравните с картинкой для A_{ij} на стр 14):

$$A_{13} = (b_2 b_1 b_2^{-1})^2 = (b_1^{-1} b_2 b_1)^2 = b_1^{-1} b_2^2 b_1 \quad (8)$$

получаем формулу:

$$b_1 A_{13} b_1^{-1} = A_{23} \Leftrightarrow b_1^{-1} A_{23} b_1 = A_{13}$$

Осталось проверить ещё 4 сопряжения:

$$b_2^{-1} A_{12} b_2 \stackrel{(8)}{=} b_2^{-2} A_{13} b_2^2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}$$

$$b_1 A_{23} b_1^{-1} \stackrel{(8)}{=} b_1^2 A_{13} b_1^{-2} = A_{12} A_{13} A_{12}^{-1} \quad (**)$$

$$b_1^{-1} A_{13} b_1 \stackrel{(8)}{=} b_1^{-2} b_2^2 b_1^2 = A_{12}^{-1} A_{23} A_{12} \quad (*)$$

$$b_2 A_{13} b_2^{-1} \stackrel{(8)}{=} b_2^2 b_1^2 b_2^{-2} = A_{23} A_{12} A_{23}^{-1}$$



Конечно, для генераторов P_n должны выполняться (16) какие-то соотношения.

Утверждение 2 Генераторы A_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$ артиновой группы краевых коэ P_n удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} A_{12} A_{34} &= A_{34} A_{12}, & A_{14} A_{23} &= A_{23} A_{14}, \\ A_{12} A_{13} A_{23} &= A_{13} A_{23} A_{12} = A_{23} A_{12} A_{13} \\ A_{13} (A_{14} A_{24} A_{34}) &= (A_{14} A_{24} A_{34}) A_{13} \end{aligned} \quad (9)$$

Четверку индексов $\{1, 2, 3, 4\}$ в этих формулах можно заменить произвольной четверкой $\{i, j, k, l\} = 1 \leq i < j < k < l \leq n$ формулы останутся верными.

Док-во: Соотношения коммутативности из первой строки (9) очевидно следуют из аналогичных соотношений на генераторах (ij) в (6).

Мы проверим соблюдение соотношения из 2-й строки (9) для группы P_3 . Проверить соотношение 4-й строки из (9) предлагается самостоятельно (задача 4-го листа). Проверка соотношений (9) в случае P_n , $n > 3$, не содержит новых моментов.

Преобразуем (*) со стр 15 иначе:

$$\begin{aligned} v_1^{-1} A_{13} v_1 &= v_1^{-1} (v_2 v_1^2 v_2^{-1}) v_1 = v_1^{-1} \underbrace{(v_2 v_1)}_{v_1^{-1}} \underbrace{(v_1 v_2)}_{v_1^{-1}} v_2^{-2} v_1 = \\ &= v_2 v_1^2 v_2 (v_1^{-1} v_2^{-2} v_1) = (v_2 v_1^2 v_2^{-1}) v_2^2 (v_1^{-1} v_2^{-2} v_1) = A_{13} A_{23} A_{13}^{-1} \end{aligned}$$

Сравнивая результат возмущений с формулой (*) (17)
на стр. 15 получаем:

$$\underline{A_{12}^{-1} A_{23} A_{12} = A_{13} A_{23} A_{13}^{-1}} \Leftrightarrow \underline{A_{12} A_{13} A_{23} = A_{23} A_{12} A_{13}} \quad (a)$$

Преобразуем иначе (**) со стр 15:

$$\begin{aligned} v_1 A_{23} v_1^{-1} &= v_1 v_2^2 v_1^{-1} = (v_1 v_2 v_1^{-1})^2 = (v_2^{-1} v_1 v_2)^2 = v_2^{-1} v_1^2 v_2 = \\ &= v_2^{-2} A_{13} v_2^2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23} \end{aligned}$$

Сравнивая результат с (***) на стр 15 имеем:

$$\underline{A_{12} A_{13} A_{12}^{-1} = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}} \Leftrightarrow \underline{A_{23} A_{12} A_{13} = A_{13} A_{23} A_{12}} \quad (b)$$

Rem Мы не доказали, что формулами (9) исчерпываются все соотношения на генераторах A_{ij} в группе P_n . В дальнейшем мы в этом убедимся, а пока мы вынуждены ввести в рассмотрение группу \tilde{P}_n :

Def 5: Назовем \tilde{P}_n группу, порождаемую набором генераторов $\{\tilde{A}_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$, удовлетворяющих соотношением (9).

\tilde{P}_n и P_n связаны отображением:

$$\underline{\tilde{P}_n \xrightarrow{\sim_n} P_n : \tilde{A}_{ij} \mapsto A_{ij}}, \text{ которое, очевидно,}$$

продолжается до гомоморфизма группы

Ясно, что
$$\underline{P_n = \tilde{P}_n / \text{Ker } \sim_n}$$

$\text{Ker} \sim_n$, если оно нетривиально, является кор- (18)
 малым замыканием прообразов тех соотношений
 на генераторы A_{ij} в P_n , которые не переписаны в (9).

Следующее Утверждение дает более тонкую характеристику сопряжений в P_n . Для дальнейшего оно не необходимо, однако в литературе по группе кос определяющие соотношения для P_n приводятся именно в виде сопряжений, доказываемых в Утверждении 3

Утверждение 3. | Нормальное замыкание
 набора элементов $\{\tilde{A}_{in}\}_{i=1 \dots n-1}$ в \tilde{P}_n порождает
 элементы $\tilde{A}_{in}^{\pm 1}, i=1 \dots n-1$.

Реш: В силу гомоморфизма \sim_n такое же утверждение
 верно для набора $\{A_{in}\}_{1 \leq i \leq n-1}$ в P_n .

Док-во: Мы проверим справедливость утверждения
 в \tilde{P}_3 (в \tilde{P}_2 можно проверить). Нам необходимо убе-
 диться, что сопряжение элементов $\tilde{A}_{23}, \tilde{A}_{13}$ с помощью
 элемента $\tilde{A}_{12}^{\pm 1}$ можно выразить в виде монома от $\tilde{A}_{i3}^{\pm 1}, i=1,2$
 Соотношения (a), (b) со стр 17 дают искомого
 выражения для $\tilde{A}_{12}^{-1} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{12}$ и $\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{12}^{-1}$.

Для проверки оставшихся двух сопряжений нужны
 вспомогательные выкладки:

$$(\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{12}) \tilde{A}_{23} \stackrel{(9)}{=} \tilde{A}_{23} (\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23}) \stackrel{(9)}{=} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{12}$$

Добавив начальное и конечное выражения этой вык-
 ладки на $(\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23})^{-1}$ слева и на \tilde{A}_{12}^{-1} справа, получаем:

$$\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{12}^{-1} = (\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23})^{-1} \tilde{A}_{23} (\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23})$$

Аналогичным образом из

$$\tilde{A}_{13} (\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23}) \stackrel{(g)}{=} (\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{12}) \tilde{A}_{13} \stackrel{(g)}{=} \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23} \tilde{A}_{13}$$


получаем:

$$\tilde{A}_{12}^{-1} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{12} = (\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23}) \tilde{A}_{13} (\tilde{A}_{13} \tilde{A}_{23})^{-1}$$

В случае \tilde{P}_3 проверка завершена. В случае \tilde{P}_4 требуется дополнительно проверить ещё два соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{24} \tilde{A}_{13}^{-1} &= (\tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14}) \tilde{A}_{24} (\tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14})^{-1} \\ \tilde{A}_{13}^{-1} \tilde{A}_{24} \tilde{A}_{13} &= (\tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34}) \tilde{A}_{24} (\tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34} \tilde{A}_{14} \tilde{A}_{34})^{-1} \end{aligned}$$

Проверить эти формулы предлагается в задаче 5 1-20 листка.

В дальнейшем, т.е. в $\tilde{P}_n, n > 4$, новых соотношений не возникает. 

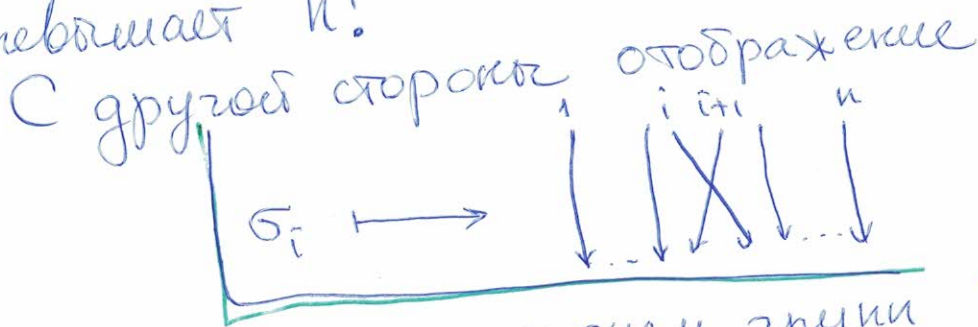
Итак, мы имеем артиковую группу кос B_n и ее нормальную подгруппу P_n . Следовательно, можем построить фактор-группу B_n/P_n и написать короткую точную последовательность.

Утверждение 4: $B_n/P_n = S'_n$ -группа перестановок

Док-во: В n задаче в терминах генераторов (20) и соотношений (см. (2), (3) на стр 10). Факторизация по P_n фактически добавляет к списку соотношений (2), (3) еще и $\sigma_i^2 = 1, i=1 \dots n-1$ (см. Замечание к определению P_n на стр 14). Утверждение задачи в 3-го пункта придает строгий вид рассуждениям выше. Итак фактор-группа B_n/P_n может задаваться в терминах генераторов $\sigma_i, i=1 \dots n$, и соотношений

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1, \quad \forall i=1 \dots n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \forall i=1 \dots n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \forall |i-j| > 1 \end{cases} \quad (10)$$

Как мы убедимся позже (см. лекции по алгебре Гекке) эта группа конечнома, число различных мономов, которые можно составить из генераторов σ_i , не превышает $n!$.



порождает гомоморфизм группы $B_n/P_n \rightarrow S_n$ (все соотношения (10) выполняются при таком отображении). Более того, это эпиморфизм, т.к. всякую перестановку можно представить в виде композиции транспозиций соседей, а у таких транспозиций есть образы — σ_i .

Т.к. $\# S_n = n!$, $\# B_n/P_n \leq n!$ и $B_n/P_n \rightarrow S_n$ (21)

Этими морфизм, заключаем

$$B_n/P_n \cong S_n \quad \square$$

Нарисуем короткую точную последовательность для артиновых групп кос, снабдив ее сразу известными нам гомоморфизмами в группе геометрических кос:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{A_{ij} \mapsto (ij)^2} & B_n & \xrightarrow{b_i \mapsto \sigma_i} & S_n \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \hat{i}_n \Big|_{P_n} & & \downarrow i_n & & \uparrow \text{Id} \begin{array}{c} i \ i+1 \\ \sigma_i \leftrightarrow X_j \end{array} \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(P_n) & \longrightarrow & \pi_1(B_n) & \longrightarrow & S_n \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Построенная диаграмма гомоморфизмов групп коммутативна, то есть проходя разными путями по стрелкам гомоморфизмов из одной исходной вершины (группы) в одну и ту же конечную вершину (группу) мы получаем идентичные результаты.

Вспомнив известную лемму о 5 гомоморфизмах (five lemma), заключаем, что для доказательства изоморфности i_n нам осталось убедиться в изоморфности его ограничения на P_n : $\hat{i}_n \Big|_{P_n}$

Изоморфизм $\hat{I}_n |_{P_n}$ мы будем доказывать индукцией по n . (22)

Базой индукции является \forall из нижеследующих фактов

* $\pi_1(P_1) \cong P_1 \cong \tilde{P}_1$ — как тривиальные группы, состоящие только из 1.

* $\pi_1(P_2) \cong P_2 \cong \tilde{P}_2$ — как бесконечные циклические группы, порождаемые единичным генератором $\mathbb{Z} \hookrightarrow A_{12} \hookrightarrow \tilde{A}_{12}$

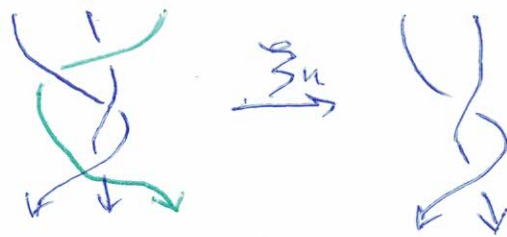
Здесь мы вновь ввели в рассмотрение \tilde{P}_n , чтобы одно в конце концов убедиться и в том, что $P_n \cong \tilde{P}_n$.

Для задания шага индукции мы построим, так называемый гомоморфизм забывания (forgetful homomorphism)

Сначала для геометрических кос:

$$\pi_1(P_n) \xrightarrow{\Sigma_n} \pi_1(P_{n-1})$$

Σ_n заключается в удалении крайней справа n -ой нити из крашеной косы:



Заметим, что для некрашеных кос такого гомоморфизма нет: перестановка коцлов нитей ему противоречит.

Утверждение 5

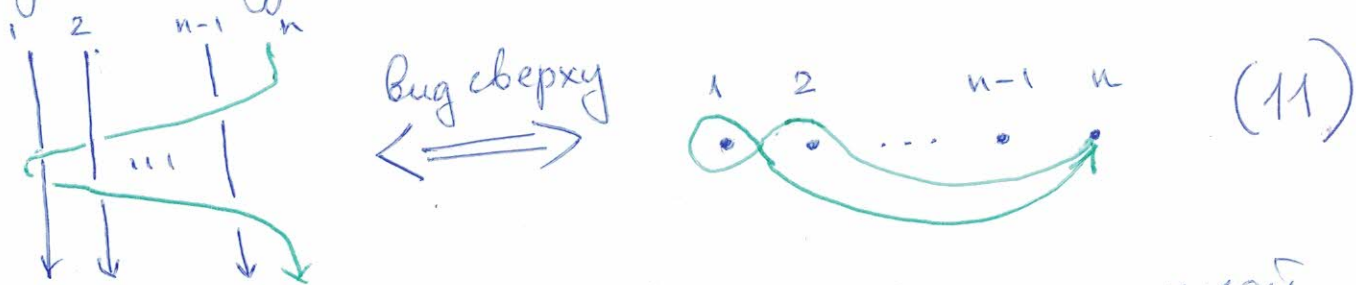
$$\text{Ker } \Sigma_n = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\})$$

23

Первая фундаментальная группа плоскости с выколотыми $(n-1)$ точками.

Пояснение. Будем считать очевидным тот факт, что $\text{Ker } \Sigma_n$ состоит из краевых кос, первые $(n-1)$ нитей которых не заплетены между собой, а n -я нить обвивается вокруг них.

Если взглянуть на такую косу сверху, то увидим следующую картинку



Получилась картинка элемента фундаментальной группы \mathbb{R}^2 с выколотыми точками $1, 2, \dots, n-1$. Такое сооставление взаимно-однозначно

Таким образом, Σ_n порождает короткую точную последовательность

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\Sigma_n} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}) \rightarrow 1$$

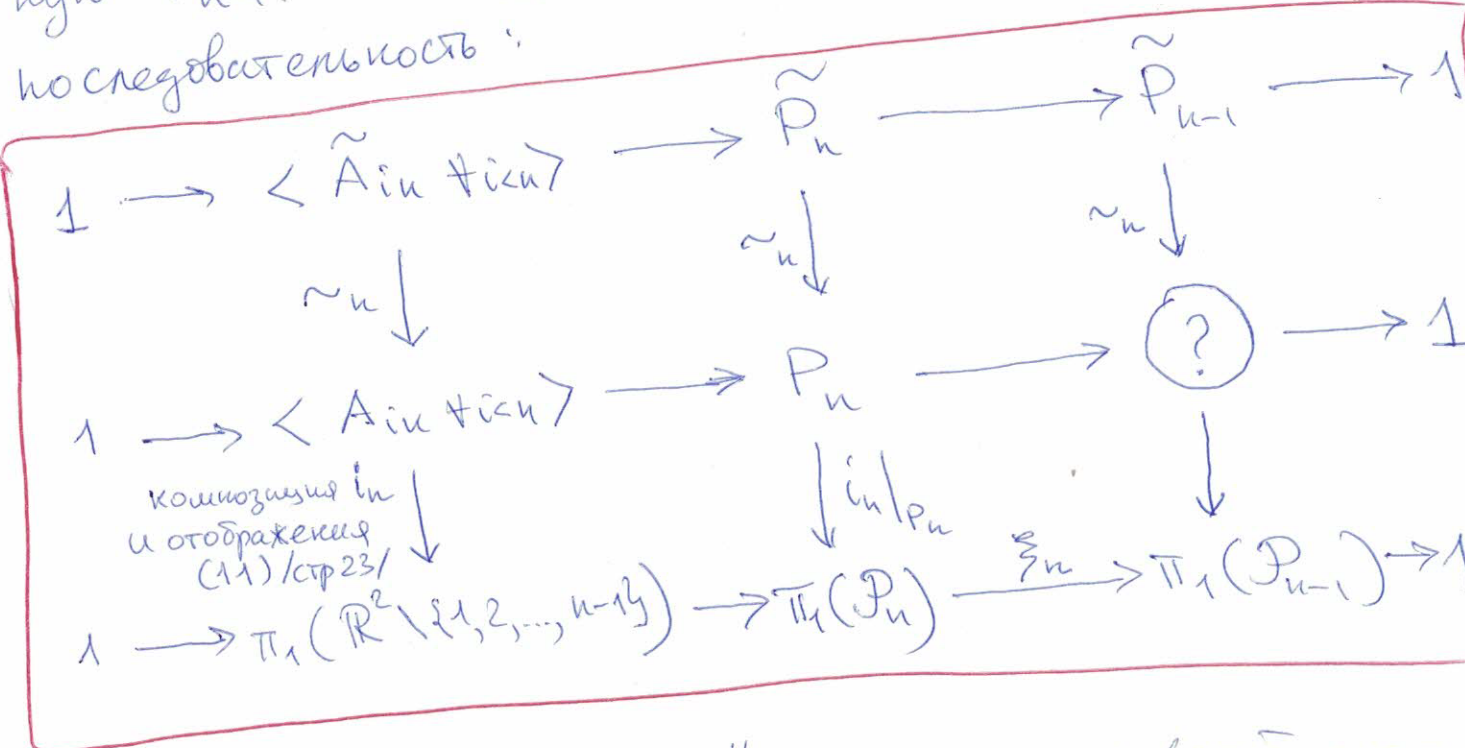
Построим теперь гомоморфизм задывания для алгебраических (артиновых) краевых кос \tilde{P}_n и P_n .

Начнем с \tilde{P}_n : рассмотрим нормально подгруппу \tilde{P}_n , полученную нормальным замыканием набора $\{\tilde{A}_{in}\}_{\neq i \leq n}$. Обозначим ее $\langle \tilde{A}_{in}, \neq i \leq n \rangle$.

Факторизуя \tilde{P}_n по этой подгруппе, мы фактически накладываем условия

$$\tilde{A}_{in} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

которые, как нетрудно убедиться, согласованы с соответствующими (g) на генераторах \tilde{P}_n (см. стр. 16). После их наложения мы получим фактор-алгебру, тождественную \tilde{P}_{n-1} . Нарисуем соответствующую точную последовательность:



Мы сразу дорисовали ее до коммутативной диаграммы.

Первую и третью строки этой диаграммы мы уже обсудили. Вторая строка подобна первой, с той поправкой, что мы не доказали, что

$$P_n / \langle A_{in} \neq i_{in} \rangle \cong P_{n-1} \text{ (в диаграмме на месте } P_{n-1} \text{ стоит ?)}$$

Действительно, мы знаем, что $P_n / \langle A_{in} \rangle$ порождается набором $\{ A_{ij}^{\pm 1} \}_{1 \leq i < j \leq n-1}$, как и P_{n-1} (это образы "неудачных" генераторов из P_n). Мы также знаем, что для этих генераторов $P_n / \langle A_{in} \rangle$, также как и для генераторов P_{n-1} , выполняются соотношения (g) (образы соотношений в P_n). Однако мы пока не знаем, нет ли ещё каких-нибудь соотношений на генераторах A_{ij} в P_n , а значит $P_n / \langle A_{in} \rangle$, которых по предположению индукции нет в $P_{n-1} \cong \tilde{P}_{n-1}$. Докажем

что соотношений нет, воспользовавшись индукцией по n .

Вертикальное отображение $\tilde{P}_{n-1} \xrightarrow{\sim_n} P_n / \langle A_{in} \rangle$

является эпиморфизмом, т.к. у всех генераторов A_{ij} группы $P_n / \langle A_{in} \rangle$ есть образы \tilde{A}_{ij} в \tilde{P}_{n-1} .

Сквозное отображение $\tilde{P}_{n-1} \xrightarrow{\sim_n} \text{(?)} \rightarrow \pi_1(P_{n-1})$

является изоморфизмом по предположению индукции:

$$\tilde{P}_{n-1} \cong \pi_1(P_{n-1}) \cong P_{n-1}. \text{ Следовательно, первый}$$

этап сквозного отображения $\tilde{P}_{n-1} \xrightarrow{\sim_n} P_n / \langle A_{in} \rangle$

является мономорфизмом, а значит изоморфизмом

Итак, $P_n / \langle A_{in} \rangle \xrightarrow{\sim} \tilde{P}_{n-1} \xrightarrow{\sim} P_{n-1}$ — (26)

изоморфизма, причём $P_n / \langle A_{in} \rangle$ порождается теми же генераторами A_{ij} , что и P_{n-1} . Значит в вершине

(?) коммутативной диаграммы действительно стоит P_{n-1} , причём все отображения в правой вертикальной строке — изоморфизмы.

Обсудим отображения в левом вертикальном столбце. Нижняя стрелка этого столбца на генераторах задаётся так (см. картинку A_{ij} на стр 14):

$$\langle A_{in} \cup \{i_k\} \rangle \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\})$$

$$A_{in} \mapsto \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \uparrow & & & & & \nearrow \end{matrix}$$

(12)

Эти элементы являются генераторами группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n-1\})$, а сама группа, как известно, является свободной. Гомоморфизм (12) является эпиморфизмом (т.к. все генераторы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n-1\})$ имеют образы). Ядро этого эпиморфизма тривиально (никак иначе было соотношение на генераторах свободной группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n-1\})$). Следовательно, по (12) — изоморфизм и $\langle A_{in} \cup \{i_k\} \rangle$ — свободная группа. Аналогично рассуждая, делаем вывод,

что $\langle \tilde{A}_{in \neq jn} \rangle \rightarrow \langle A_{in \neq jn} \rangle$ — тоже
изоморфизм свободных групп.

Итак, левой и правой вертикальные столбцы
в коммутативной диаграмме на стр 24 состоят
из изоморфизмов. В силу леммы о 5-гомоморфизмах
в среднем столбце мы тоже имеем изоморфизмы:

$$\boxed{\tilde{P}_n \cong P_n \cong \pi(F_n)}$$

Мы доказали Теорему:

Геометрическое и алгебраическое представления
для групп кос и краевых кос эквивалентны.

$$\pi_1(B_n) \cong B_n, \quad \pi_1(F_n) = P_n.$$

Отображения i_n и $i_n|_{P_n}$ являются изомор-
физмами.

Группа краевых кос P_n порождается гене-
раторами $\{A_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ с соотношениями (9)
на них (других соотношений нет.).

§ 3 Многообразие группы кос

Сначала немного о кокетных группах, порожденных отражениями — группах Кокстера (Coxeter)

Эти группы порождаются набором отражений

$$\boxed{\sigma_i, i=1, \dots, n-1, \sigma_i^2=1}$$

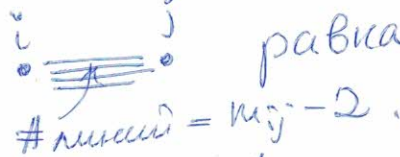
Для кокетности группы накладываются условия

$$\boxed{(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = 1,}$$

где m_{ij} — натуральные числа ≥ 2 .

Набор m_{ij} задаёт группу. Группы кодируются графами с $n-1$ вершинами (\Leftrightarrow генераторы группы)

и рёбрами с кратностями. Кратность рёбра между вершинами i, j равна $m_{ij}-2$.



Пара вершин без рёбер между ними :

$$i \quad j \Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1$$

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i}$$

если учесть $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = 1$

Пара вершин с 1-м соединяющим их ребром

$$i \xrightarrow{\quad} j \Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_j)^3 = 1$$

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j}$$

соотношение кос

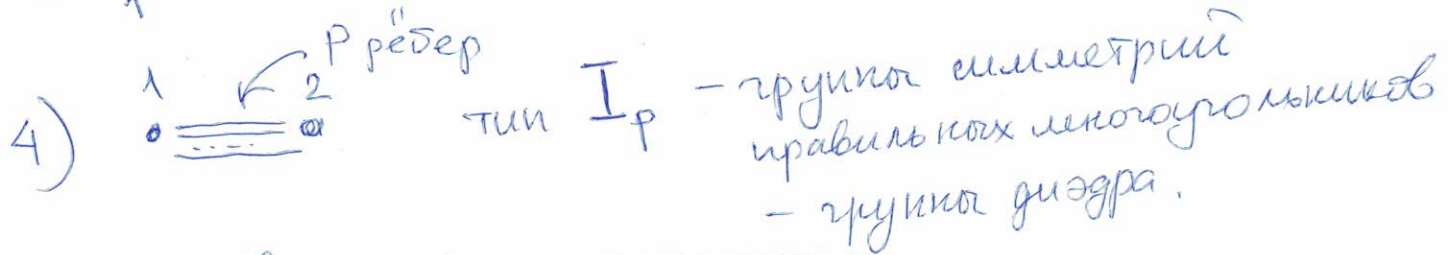
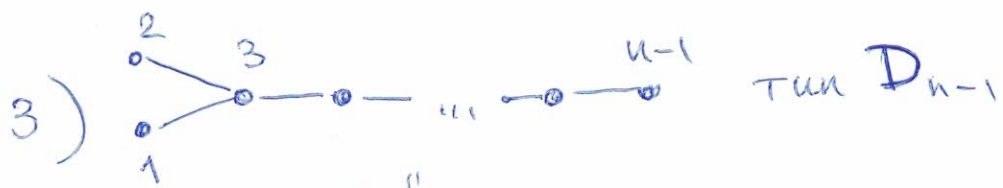
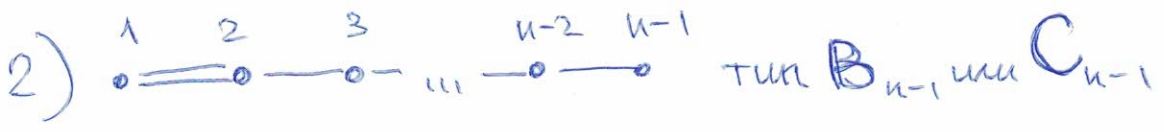
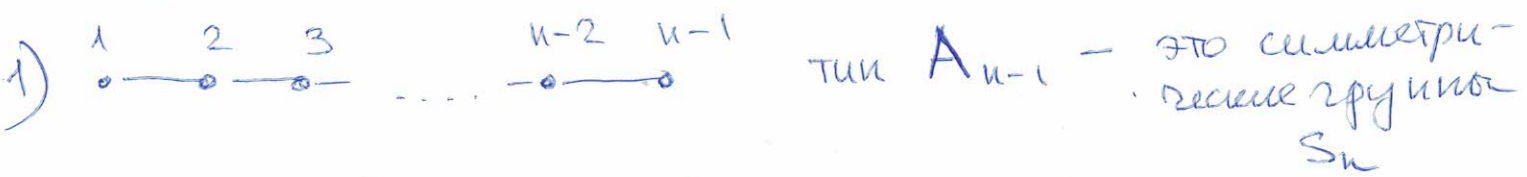
Пара вершин с 2-мя соединяющими их ребрами

$$i \xrightarrow{\quad\quad} j \Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_j)^4 = 1$$

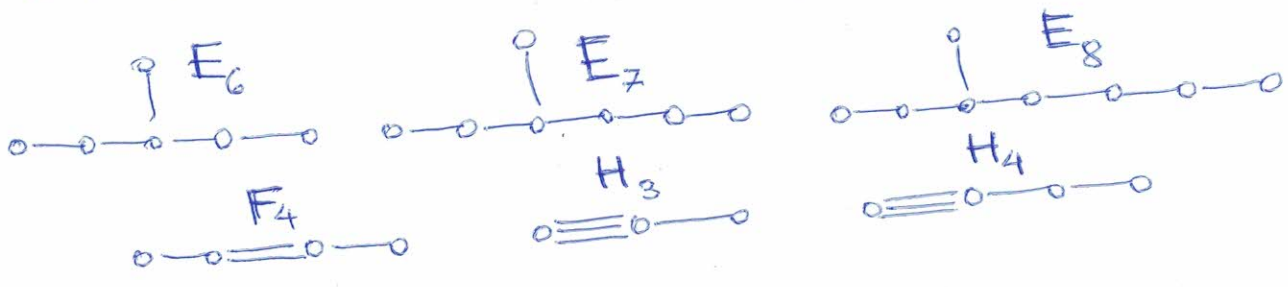
$$\boxed{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \sigma_i}$$

называется уравнением отражения


Все конечно группы Коштера кодируются
следующими диаграммами



а также 6 исключительных групп:



Забудем теперь об условиях $\sigma_i^2 = 1$, но сохраним те же правила задания соотношений между генераторами группы с помощью графов:

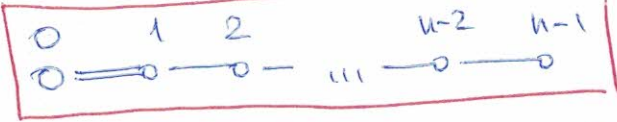
①  ← графическое задание соотношений в рассмотренной нами артиновой группе кос B_n

Это группа кос типа A_{n-1}

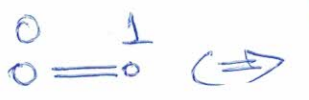
Соотношения в ней:

$$\begin{cases} i & i+1 \\ \circ & \circ \\ \text{---} & \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}$$

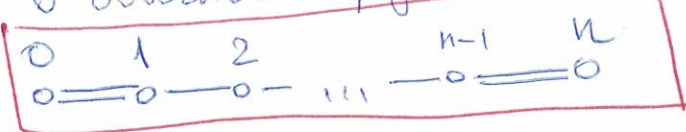
$$\begin{cases} i & j \\ \circ & \circ \\ | & | \\ i-j > 1 \end{cases} \Leftrightarrow v_i v_j = v_j v_i$$

②  ← группа кос типа B_{n-1}

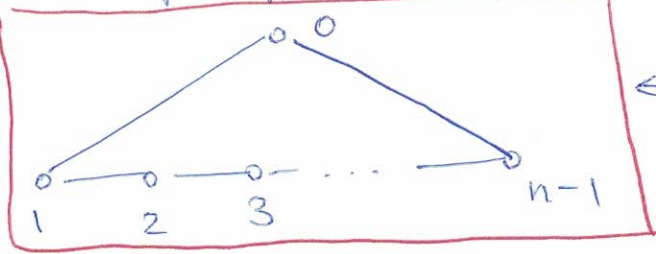
Ее генераторы: $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, Соотношения:

 $\Leftrightarrow v_0 v_1 v_0 v_1 = v_1 v_0 v_1 v_0$ - соотношение отражения (reflection equation)

Остальные соотношения, как в обычной группе кос.

③  ← косы типа C_{n-1}

Ее генераторы $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$

④  ← адрическая группа кос типа \tilde{A}_{n-1}

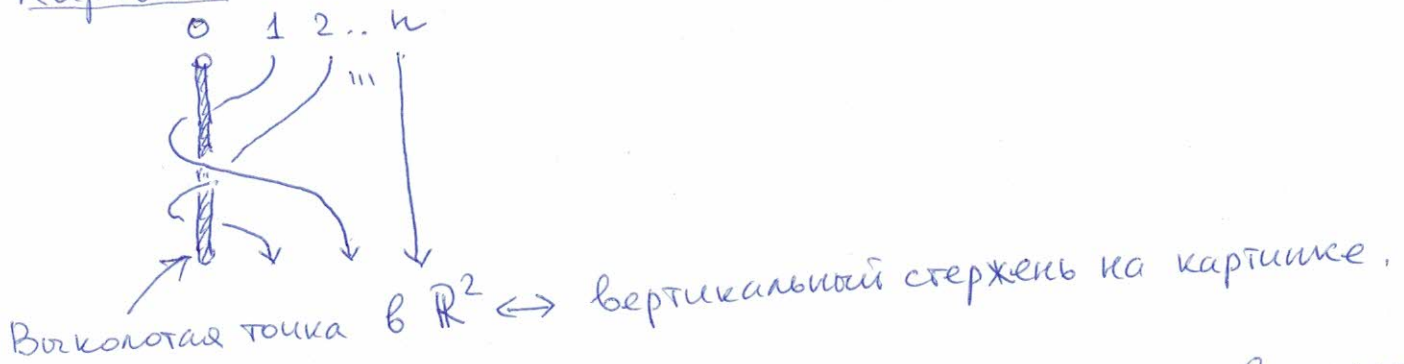
Ее генераторы $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

Геометрическая интерпретация этих кос

① A_{n-1} — $\pi_1(B_n)$ — то, что мы изучим.

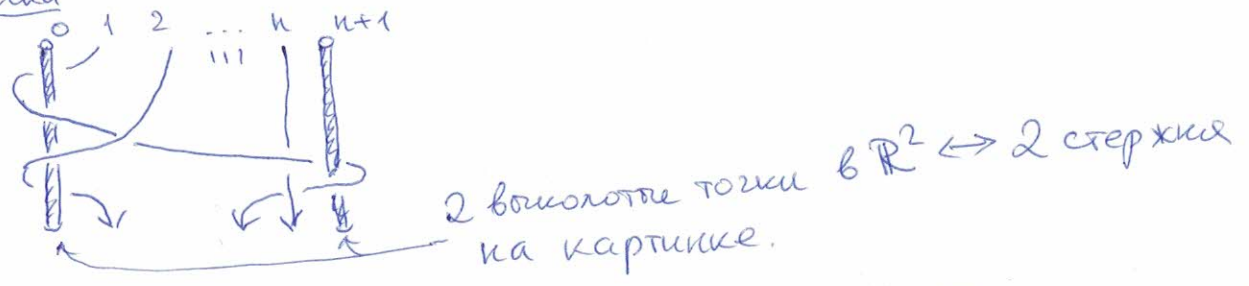
② B_{n-1} — первая функ. группа многообразия и неупорядоченных несовпадающих точек на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Картинка:



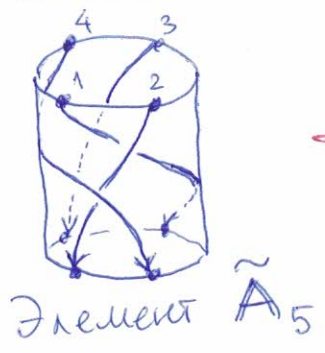
③ G_{n-1} — — " — и неупорядоченных несовпадающих точек на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, n+1\}$

Картинка:



④ \tilde{A}_{n-1} — подгруппа фундаментальной группы и неупорядоченных несовпадающих точек на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$

Картинки:



Но:



← это не элемент \tilde{A}_5
 В подгруппе \tilde{A}_{n-1} нет "скручиваний" цилиндра, при которых нити не заплетаются между собой. Если \tilde{A}_{n-1} допустить скручиваниями, то получим $B_{n-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \sim S^1 \times \mathbb{R}^1$

Гомоморфизмы кос разных типов

1)

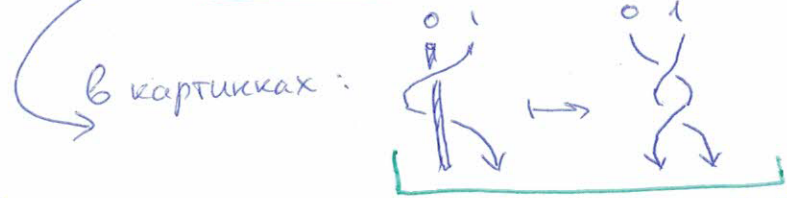
$$B_{n-1} \xrightarrow{\text{Hom}} A_n$$

$\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$

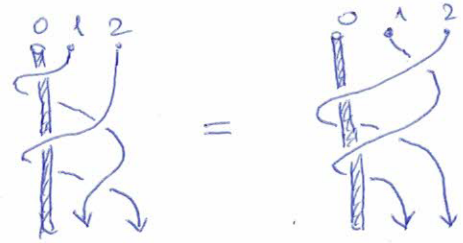
сдвинуть индексы генераторов: $i \rightarrow i-1$ для удобства.

На генераторах задаётся так.

$$B_{n-1} \ni \begin{cases} v_i \mapsto v_i \in A_n \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ v_0 \mapsto v_0^2 \end{cases}$$



Соотношение $v_0 v_1 v_0 v_1 = v_1 v_0 v_1 v_0$ в картинках:



Проверьте выполнение этого и других соотношений на генераторах B_{n-1} для их образов в A_n .

2)

$$B_{n-1} \xrightarrow{\text{Hom}} C_{n-1}$$

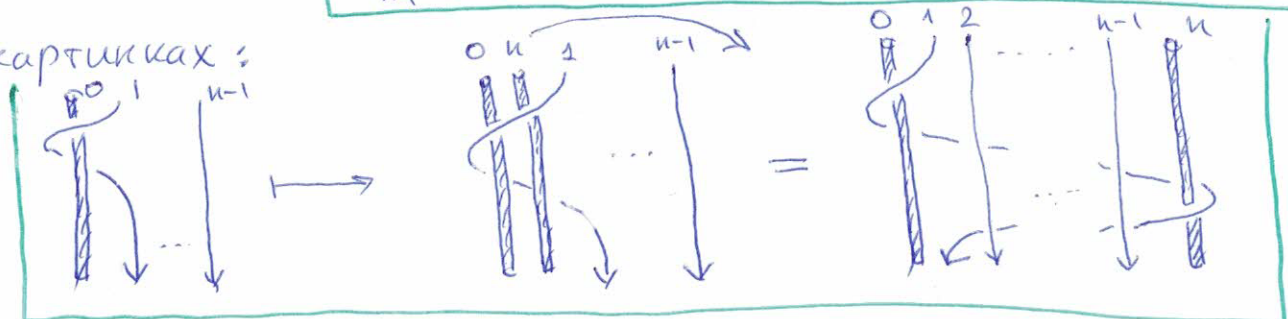
$\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$

Помимо очевидного вложения: $\{v_0 \mapsto v_0\} \in C_{n-1}$
 $B_{n-1} \ni \{v_i \mapsto v_i\} \in C_{n-1}$

есть нетривиальное: $v_i \mapsto v_i \quad i = 1, \dots, n-1$

$$B_{n-1} \ni v_0 \mapsto v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n (v_1 v_2 \dots v_{n-1})^{-1}$$

В картинках:



3) Дополним арринговую группу кос \tilde{A}_{n-1} генератором τ_n , удовлетворяющим соотношениям:

$$v_{i+1} = \tau_n v_i \tau_n^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \pmod{n}$$

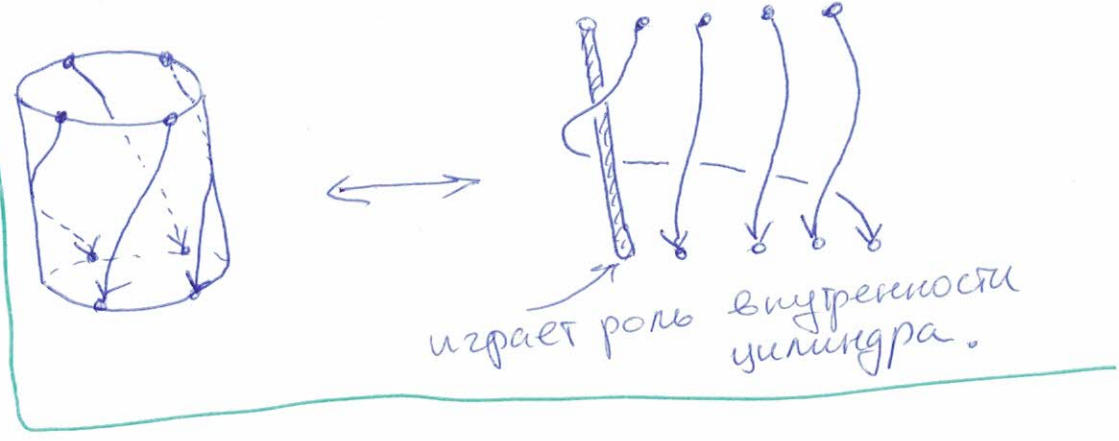
Картинка генератора τ_n нарисована на стр. 31 внизу справа.

$$(\tilde{A}_{n-1} + \tau_n) \cong B_{n-1}$$

Этот изоморфизм порождается диедрией генераторов:

$$\tilde{A}_{n-1} + \tau_n \ni \left. \begin{array}{l} v_i \leftrightarrow v_i \\ \tau_n \leftrightarrow v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} \end{array} \right\} \ni B_{n-1} \quad (13)$$

В картинках



Проверьте совместность отображения (13) с соотношениями на генераторах группы. (см. задачу 7 у 1-го листа).

Замечательные коммутативные подгруппы (34)

в группах кос.

Def Зададим в группе кос типа B_{n-1} набор, так называемых, элементов Хьюза - Мерфи (Hughes - Murphy) $\{J_i\}_{i=1 \dots n+1}$

$$J_1 = 1, J_2 = B_0, J_{i+1} = v_{i-1} J_i v_{i-1} \quad \forall i \geq 3$$

Утверждение: Набор $\{J_i\}_{i=1 \dots n+1}$ — коммутативен

Док-во: основано на формулах

$$J_i v_j = v_j J_i \quad \forall j \neq i-1, i$$

и

$$J_i J_{i+1} = J_i v_{i-1} J_i v_{i-1} = v_{i-1} J_i v_{i-1} J_i = J_{i+1} J_i$$



Проверьте их

Образы элементов J_i при гомоморфизмах B_{n-1} в $A_n, C_{n-1}, (\tilde{A}_{n-1} + \tau_n)$ порождают коммутативные подгруппы в соответствующих группах кос:

Для A_{n-1} :

$$\{J_i\}_{i=1 \dots n}, J_1 = 1, J_2 = v_1^2, J_{i+1} = v_i J_i v_i$$

Для G_{n-1} :

(35)

$$\left\{ \begin{aligned} J_i \}_{i=1 \dots n+1}, \quad J_1 = 1, \quad J_2 = B_0(b_1 b_2 \dots b_{n-1}) B_n(b_1 b_2 \dots b_{n-1})^{-1} \\ J_{i+1} = (b_{i-1} \dots b_2 b_1) B_0(b_1 b_2 \dots b_{n-1}) B_n(b_i b_{i+1} \dots b_{n-1})^{-1} \end{aligned} \right.$$

Для изоморфной B_{n-1} группы $(\tilde{A}_{n-1} + \tau_n)$:

$$\left\{ \begin{aligned} J_i \}_{i=1 \dots n+1}, \quad J_1 = 1, \quad J_2 = \tau_n(b_1 b_2 \dots b_{n-1})^{-1} \\ J_{i+1} = (b_{i-1} \dots b_2 b_1) \tau_n(b_i b_{i+1} \dots b_{n-1})^{-1} \end{aligned} \right.$$

Эти кадры играют большую роль в теории представлений и в приложениях группы кос.

Отметим, что для обложки группы кос (тип A_{n-1}) генератор её центра представляется

в виде

$$Z_n = \prod_{i=1}^n J_i$$

см. замечание на стр 2.