Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 10 занятия.

Решения этих задач (и оставшихся задач из прошлых заданий) будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) На занятии мы обсуждали следующую конструкцию, связанную с нормкубикой $X = v_{1,3}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ (см задачу 3 задания 8). Если $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$, то $X \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}((S^3V^*)^*)$ — каждая точка $\mathbb{P}^1$ при отображении Веронезе интерпретируется как линейная форма (с точностью до ненулевого сомножителя) на множестве кубических форм. Обозначим через $D \subset \mathbb{P}^3$ множество точек, лежащих на касательных прямых к кривой X; в пункте д) задачи 3 задания 8 был намечен подход к доказательству того, что D является проективной поверхностью в $\mathbb{P}^3$ (т.е. замкнутым подмножеством, задаваемым одним уравнением) и вычислению степени этой поверхности (как степени дискриминанта кубического уравнения). Эта задача остается открытой, а на занятии мы обсудили, как найти эту степень в предположении, что замкнутость D уже доказана — надо найти число пересечений D с общей прямой. Мы сделали это в предположении, что прямая l выбрана таким образом, что ни одна из проходящих через l плоскостей не пересекает нормкубику X в единственной точке (трехкратно). Покажите, что такая прямая, действительно, существует.

(2) При обсуждении поверхности Веронезе $X = v_{2,2}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ (см задачу 4 задания 8, обозначения которой мы сохраняем) мы двумя способами показали, что Z является кубической гиперповерхностью в $\check{\mathbb{P}}^5$. Первый состоит в том, что Z это множество вырожденных коник в $\mathbb{P}^2$ и потому задается одним алгебраическим условием — определитель матрицы квадратичной формы, задающей конику, равен нулю, и это кубический многочлен от коэффициентов матрицы. Второй подход состоит в том, что произвольная прямая в $\check{\mathbb{P}}^5$ это пучок коник в $\mathbb{P}^2$, и пересечения этой прямой с Z это вырожденные коники этого пучка, а их в любом пучке коник на плоскости не более трех. Продолжая этот подход покажите, что множество особых точек кубики Z есть в точности поверхность Веронезе $Y \subset Z \subset \check{\mathbb{P}}^5$ — для этого достаточно показать, что любую вырожденную конику из $Z \setminus Y$ можно включить в пучок коник, в котором есть ровно три вырожденных коники, а в любом пучке коник, содержащем конику из Y (т.е. двойную прямую) число вырожденных коник менее трех.

(3) Отметим, что особую кубическую гиперповерхность $Z \subset \check{\mathbb{P}}^5$ из предыдущей задачи можно интерпретировать как множество неупорядоченных пар прямых на плоскости (каждая вырожденная коника это пара прямых, возможно, совпадающих), т.е. как результат факторизации прямого произведения $\check{\mathbb{P}}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ по симметрической группе S_2, переставляющей сомножители. (По этой причине Z иногда называют

кубическим симметроидом.) Аналогично для любого алгебраического многообразия X можно рассмотреть прямое произведение $X \times X \times \ldots \times X = X^n$, действие симметрической группы S_n на нем и факторизацию по этому действию; можно показать, что это всегда проективное многообразие, называемое n-ой симметрической степенью многообразия X и обычно обозначаемое $S^n X$. Опишите $S^n\mathbb{P}^1$ — можно, например, найти ответ среди уже обсуждавшихся примеров, особенно для $n = 3$.

(4) Примените использовавшийся в предыдущих задачах геометрический подход к вычислению степени многообразия Сегре $X = s_{1,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ — для этого надо найти число точек пересечения X с общей плоскостью в $\mathbb{P}^5$. Вот основные этапы.

а) В X выберем две плоскости $L = s_{1,2}(a \times \mathbb{P}^2)$ и $L' = s_{1,2}(a' \times \mathbb{P}^2)$ (a и a' — две различные точки $\mathbb{P}^1$). Тогда имеется естественный проективный изоморфизм $\varphi : L \to L'$, сопоставляющий точке $s_{1,2}(a, b) \in L$ точку $s_{1,2}(a', b) \in L'$ ($b \in \mathbb{P}^2$).

б) Пусть M — еще одна плоскость в $\mathbb{P}^5$, не пересекающаяся с L и L'. Покажите, что для любой точки $c' \in L'$, линейная оболочка $\langle c', M\rangle = \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$, причем пересечение $\langle c', M\rangle \cap L$ состоит из единственной точки c, и сопоставление $c' \mapsto c$ есть проективный изоморфизм $\psi : L' \to L$. Покажите также, что прямая cc' всегда пересекает M в одной точке $d \in M$ (и сопоставление $c' \mapsto d$ тоже есть проективный изоморфизм плоскостей L' и M).

в) Покажите, что $c \in L$ является неподвижной точкой проективного автоморфизма $\psi\circ\varphi : L \to L$ тогда и только тогда, когда (в обозначениях предыдущего пункта) $d \in M \cap X$.

г) Покажите, что $M \cap X$ (если оно конечно) состоит не более чем из трех точек. Завершите доказательство того, что степень X равна ровно 3, указав явно плоскость, пересекающую X в трех различных точках.

д) Можно ли это вычисление обобщить на случай $s_{1,m}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{2m+1}$?