Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 8 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Напоминание про квадрики. Пусть V — векторное пространство над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, $B(u,v)$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, тогда линейное отображение $\rho_B : V \to V^*$, задаваемое формулой $\rho_B(u)(v) = B(u,v)$ является самодвойственным (т.е. ρ_B совпадает с двойственным отображением $\rho_B^* : (V^*)^* \to V^*$ при каноническом отождествлении $(V^*)^*$ с V), причем по любому самодвойственному отображению $\rho : V \to V^*$ симметрическая билинейная форма восстанавливается по формуле $B_\rho(u,v) = \rho(u)(v)$. Ядром формы B называется $\operatorname{Ker} B := \operatorname{Ker}\rho_B = \{u \in V, \quad B(u,v) = 0 \quad \forall v \in V\}$; форма называется невырожденной, если ядро нулевое. Ранг формы это ее единственный инвариант: все формы одного ранга получаются друг из друга заменой координат. Квадрика $Q \subset \mathbb{P}(V)$ это множество нулей квадратичной формы $B(v,v)$. Если $v \in V$, $v \neq 0$, $a = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$, то множество нулей линейной формы $\rho_B(v) \in V^*$ называется полярой квадрики Q относительно точки a; эта гиперплоскость (или все $\mathbb{P}(V)$, если $v \in \operatorname{Ker} B$) обозначается $P_a(Q)$.

а) Покажите, что если прямая $l \subset \mathbb{P}(V)$ проходит через точку a и пересекает квадрику Q в двух различных точках b и c и поляру $P_a(Q)$ в точке d, то двойное отношение $(adbc) = -1$. (Равносильное утверждение состоит в том, что инволюция из задачи 1 прошлого домашнего задания с $L = a$ $M = P_a(Q)$ переводит квадрику Q в себя.)

б) Покажите, что $P_a(Q) \cap Q$ это геометрическое место точек касания квадрики Q и касательных прямых к ней, проведенных из точки a.

в) Покажите, что $b \in P_a(Q) \Leftrightarrow a \in P_b(Q)$.

г) Пусть квадрика Q вырождена, выберем любое подпространство $U \subset V$ так, что $V = \operatorname{Ker} B \oplus U$. Покажите, что ограничение $\widetilde{B}$ формы B на U невырождено, и тем самым $\widetilde{B}$ задает невырожденную квадрику $\widetilde{Q} \subset \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$. Покажите, что квадрика Q это геометрическое место точек, лежащих на прямых, соединяющих точки $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} B)$ с точками $\widetilde{Q}$.

(2) Мы определили отображение Веронезе $v_{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ $\left(N = \binom{n+d}{d} - 1\right)$ формулами $w_I = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$ (здесь x_i это координаты в $\mathbb{P}^n$, $I = (i_0, \dots, i_n)$ — мультииндекс, $i_0 + \dots + i_n = d$, а w_I это координаты в $\mathbb{P}^N$). Завершите начатое на занятии доказательство того, что, что образ отображения отображения Веронезе $v_{n,d}(\mathbb{P}^n)$ задается в $\mathbb{P}^N$ всевозможными уравнениями вида $w_I w_J = w_K w_L$, где $I + J = K + L$. Для этого осталось доказать, что множество решений этих уравнений целиком содержится в объединении карт $U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$, где аффинная карта $U_k \subset \mathbb{P}^N$ задается условием $w_{0,\dots 0,d,0,\dots,0} \neq 0$ (d стоит в k-ой позиции).

(3) Вопросы про $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, обозначим $X = v_{1,3}(\mathbb{P}^1)$, мы выяснили, что это пространственная кубическая кривая, она называется *нормкубикой*.

а) Найдите размерность пространства квадрик, проходящих через X.

б) Покажите, что вершины всех особых квадрик, проходящих через X, лежат на X.

в) Докажите, что через любую точку $\mathbb{P}^3$, не лежащую на X, проходит ровно одна хорда (или касательная) кривой X.

г) Покажите, что множество точек, лежащих на касательных прямых к кривой X, является проективной поверхностью в $\mathbb{P}^3$; найдите ее степень.

д) Покажите, что в двойственном пространстве $\check{\mathbb{P}}^3$ (точки которого можно интерпретировать как однородные кубические формы от двух переменных) имеется замкнутое подмножество $Y \subset \check{\mathbb{P}}^3$ форм, являющихся кубом линейной формы, и замкнутое подмножество $Z \subset \check{\mathbb{P}}^3$ форм, делящихся на квадрат линейной формы. Покажите, что Y изоморфно X, а Z доставляет ответ к предыдущему пункту.

(4) Вопросы про $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Обозначим $X = v_{2,2}(\mathbb{P}^2)$, покажите, что это поверхность 4 степени в $\mathbb{P}^5$, она называется *поверхностью Веронезе.* Покажите, что в двойственном пространстве $\check{\mathbb{P}}^5$ (точки которого можно интерпретировать как однородные квадратичные формы от трех переменных) имеется замкнутое подмножество $Y \subset \check{\mathbb{P}}^5$ форм, являющихся квадратом линейной формы, и замкнутое подмножество $Z \subset \check{\mathbb{P}}^5$ вырожденных квадратичных форм. Покажите, что Y изоморфно X, а Z заметается всевозможными хордами поверхности Y. Покажите, что Z является гиперповерхностью в $\check{\mathbb{P}}^5$ и найдите ее степень.