Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 9 занятия.

У нас скопилось много содержательных геометрических задач, поэтому задачи 2-6 из этого списка предлагаются на более длительный срок, и их решения будут обсуждаться по мере успехов слушателей на нескольких ближайших занятиях. Задачу 1 предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, заданная уравнением $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, где F однородная форма, $a \in X$, $l \subset \mathbb{P}^n$ — прямая, проходящая через точку a. Прямая l называется касательной прямой к X в точке a, если ограничение формы F на прямую l имеет кратный нуль в точке a. Множество таких точек $b \in \mathbb{P}^n$, что прямая ab касается X в точке a, называется *проективной касательной гиперплоскостью* к X в точке a и обозначается $\mathbb{T}_a X$.

   а) Докажите, что $\mathbb{T}_a X$, действительно, является либо гиперплоскостью в $\mathbb{P}^n$, либо совпадает со всем $\mathbb{P}^n$. В первом случае точка a называется *простой* точкой гиперповерхности X, а во втором случае — *особой* точкой гиперповерхности X.

   б) Пусть a простая точка на X. Каким уравнением задается гиперплоскость $\mathbb{T}_a X$?

   в) Покажите, что если Q — квадрика, то (в обозначениях задачи 1 прошлого задания) ее особые точки это в точности точки $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} B)$.

   г) Покажите, что если Q — невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^n$, $n > 2$, и $a \in Q$, то $\mathbb{T}_a Q$ это единственная гиперплосокость, проходящая через точку a, такая что $n-2$-мерная квадрика $Q \cap \mathbb{T}_a Q \subset \mathbb{T}_a Q = \mathbb{P}^{n-1}$ особа в точке a.

(2) На занятии мы вспомнили, что прямые в $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$ параметризуется точками квадрики Плюккера $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2 V)$: прямой $l = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^3$ соответствует бивектор $u \wedge v$, где u и v образуют какой-нибудь базис двумерного подпространства $W \subset V$. Пусть Q — невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^3$, тогда прямым из каждого семейства прямолинейных образующих этой квадрики соответствуют точки в $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$. Покажите, что точки, соответствующие каждому семейству, образуют проективную кривую в $\mathbb{P}^5$, найдите степень этих кривых и наименьшие проективные подпространства в $\mathbb{P}^5$, их содержащие. [Эти кривые нетрудно описать явно для квадрики, заданной уравнением $x_0 x_3 = x_1 x_2$, учитывая, что два семейства прямых на ней описываются простыми уравнениями $x_0 = t x_1$, $x_2 = t x_3$ и $x_0 = s x_2$, $x_1 = s x_3$, где s t — аффинные параметры для каждого из двух семейств. И не забудьте про отображение Веронезе!]

(3) Пусть Q — невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^3$, и $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая. Покажите, что при всех $a \in l$ полярные плоскости P_aQ образуют пучок плоскостей, проходящих через некоторую прямую $l' \subset \mathbb{P}^3$, и сопоставление $l \mapsto l'$ является инволюцией квадрики Плюккера $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$; обозначим эту инволюцию i_Q.

а) Пусть прямая l пересекает Q в двух различных точках a и b, l_a и l_b — прямые из одного семейства образующих квадрики, проходящие через точки a и b соответственно, а прямые m_a и m_b — прямые из второго семейства образующих, проходящие через точки a и b. Покажите, что $i_Q(l)$ — это прямая, проходящая через точки $l_a \cap m_b$ и $l_b \cap m_a$.

б) Опишите действие инволюции i_Q на прямые, касающиеся квадрики. Какие прямые неподвижны при этой инволюции?

в) Докажите, что i_Q является регулярной инволюцией квадрики $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$. Можно ли эту инволюцию описать в терминах задачи 1 из 7 задания? [Действие инволюции i_Q на разложимые бивекторы, задающие прямые, нетрудно вычислить явно, пользуясь подсказкой к предыдущей задаче.]

(4) Мы на занятии обсудили решения пунктов а), б) и в) задачи 3 из прошлого задания; г) и д) остались на следующий раз. Возник также следующий вопрос. Мы выяснили, что любая квадрика, проходящая через норм-кривую $X \subset \mathbb{P}^3$, задается уравнением $\lambda F_0 + \mu F_1 + \nu F_2 = 0$, где F_0, F_1 и F_2 — три возможных в данном случае уравнения вида $w_I w_J = w_K w_L$ с $I + J = K + L$ (см задачу 2 прошлого задания), поэтому квадрики, проходящие через X, соответствуют точкам проективной плоскости с однородными координатами $(\lambda : \mu : \nu)$. Покажите, что множество точек этой плоскости, соответствующих особым квадрикам, является проективной кривой, и найдите ее степень.

(5) Остается задача 4 прошлого задания.

(6) Задача с позапрошлого занятия. Мы обсуждали, что кривые второго порядка (=коники) на плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ соответствуют точкам $\mathbb{P}(S^2V^*) = \mathbb{P}^5$. Пусть $a \in \mathbb{P}^2$ и $l \subset \mathbb{P}^2$ — прямая на плоскости. Покажите, что коники, проходящие через точку a, образуют гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{P}^5$, а коники, касающиеся прямой l — гиперповерхность $Z_l \subset \mathbb{P}^5$. Найдите степень гиперповерхности Z_l. Имеется шесть задач ($k = 0,1,2,3,4,5$), предполагающих конечный ответ: сколько существует невырожденных коник на плоскости, проходящих через k точек и касающихся $5-k$ прямых, при условии общего положения конфигурации из этих k точек и $5-k$ прямых. Найдите ответы при каждом значении k. При каких значениях k ответ нельзя получить с помощью теоремы Безу как общее число точек пересечения k гиперплоскостей H_{a_i} $(i = 1,\dots,k)$ и $5-k$ гиперповерхностей Z_{l_j} $(j = 1,\dots,5-k)$? Объясните, что происходит в каждом из этих случаев.