Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 7 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Рассмотрим в $\mathbb{P}^n$ два непересекающихся подпространства $L = \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ и $M = \mathbb{P}^{n-m-1} \subset \mathbb{P}^n$. Покажите, что для любой точки $X \in \mathbb{P}^n \setminus (L \cup M)$ существует единственная прямая $l \subset \mathbb{P}^n$ такая, что $X \in l$ и $l \cap L \neq \varnothing$ и $l \cap M \neq \varnothing$; тогда обозначим точки пересечения прямой l с L и M соответственно через A и B. Покажите, что на прямой l тогда существует единственная точка X' такая, что $(A, B, X, X') = -1$. Продолжается ли сопоставление $X \mapsto X'$ до регулярной инволюции $\mathbb{P}^n$?

(2) Классическая теорема Паппа утверждает, что если на прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ выбраны три различные точки A, B, C, а на другой прямой $l' \subset \mathbb{P}^2$ выбраны три различные точки A', B', C', то три точки пересечения прямых $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ и $BC' \cap B'C$ лежат на одной прямой. Докажите теорему Паппа, выбрав подходящий пучок кубик таким образом, чтобы одна из кривых этого пучка оказалась распавшейся кубикой, содержащей искомую прямую в качестве неприводимой компоненты.

(3) Докажите, что $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ не изоморфны. (Мы уже видели, что они бирационально изоморфны.)

(4) Покажите, что квазипроективное многообразие $\mathbb{P}^2 \setminus \{a\}$ (a — точка в $\mathbb{P}^2$) не изоморфно никакому проективному многообразию.

(5) В задачах 2 и 6 прошлого задания были рассмотрены бирациональные отображения проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ соответственно, в проективную плоскость (задача 2) и в квадрику (задача 6 — обратное отображение к стереографической проекции). Найдите образы прямых при этих отображениях. (Ответ зависит от того, проходит ли прямая через точки неопределенности отображения!).