Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 5 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Найдите группу бирациональных автоморфизмов аффинной прямой.

(2) Найдите группу бирегулярных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$.

(3) Мы описали покрытие проективного пространства $\mathbb{P}^n$ стандартными аффинными картами U_i, задаваемыми (при некотором выборе однородных координат $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$) условием $x_i \neq 0$. Существует ли аффинное открытое подмножество $V \subset \mathbb{P}^n$, не содержащееся ни в одной такой карте ни при каком выборе координат?

(4) Кривая C задана в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ уравнением $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$. Покажите, что отображение $f : C \to \mathbb{P}^1$, заданное однородными формами 1 степени $s_0 = x_0 - x_1$, $s_1 = x_2$ (где $(s_0 : s_1)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^1$), регулярно, и является изоморфизмом. Найдите однородные формы от $(s_0 : s_1)$, задающие обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{P}^1 \to C$.

(5) (Проективная версия теоремы Гильберта о нулях) Докажите, что многочлены из однородного[1] идеала $I \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ не имеют общих нулей в $\mathbb{P}^n$ тогда и только тогда, когда при некотором натуральном N идеал I содержит все мономы степени N от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

[1]Напомним, что идеал называется однородным, если он вместе с каждым многочленом содержит все его однородные компоненты.