Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 6 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) (Напоминание про двойное отношение четырех точек на проективной прямой.) Пусть $(A_1, A_2, A_3, A_4) = \lambda$ — двойное отношение четырех точек на проективной прямой. Сколько различных значений может принимать двойное отношение $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)})$ при всех возможных перестановках $\sigma \in S_4$? Ответ зависит от λ — перечислите все варианты. Опишите подгруппу в S_4, состоящую из всех перестановок, не меняющих значения двойного отношения.

(2) Покажите, что отображение $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, заданное формами 2 степени $\varphi(x) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_1x_0)$ (здесь $x \in \mathbb{P}^2$ это точка с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$) является бирациональным автоморфизмом проективной плоскости. Покажите, что φ является инволюцией. (Дайте определение, что значит, что бирациональный автоморфизм является инволюцией!) Укажите открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}^2$, на котором отображение φ регулярно, и открытое подмножество $V \subset U$, на котором φ является изоморфизмом. Опишите действие φ на множестве $U \setminus V$.

(3) Пусть X и Y — плоские аффинные кривые, заданные, соответственно, уравнениями $y = 0$ (т.е. X это ось абсцисс) и $y = x^2$ (т.е. Y это парабола). Вычислите $\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}[x,y]} \mathbb{K}[Y]$.

(4) Пусть $a_0, \ldots, a_n$ и $b_0, \ldots, b_m$ формальные переменные, припишем каждой из них степень по правилу $\deg a_i = i$ и $\deg b_i = i$, и определим степень монома как $\deg(\prod a_i^{k_i} \prod b_j^{m_j}) = \sum ik_i + \sum jm_j$. Рассмотрим результант $\mathrm{Res}(P, Q)$ многочленов $P(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n$ и $Q(t) = b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_{m-1}t + b_m$. Докажите, что все мономы в разложении определителя $\mathrm{Res}(P, Q)$ имеют степень mn.

(5) Мы определили отображение Сегре $s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ формулами $u_{i,j} = x_iy_j$. (Здесь $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $y = (y_0 : \ldots : y_m) \in \mathbb{P}^m$, $N = (n+1)(m+1) - 1$, а $u_{i,j}$, где $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, — однородные координаты в $\mathbb{P}^N$.) Мы показали, что s является биекцией между $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ и замкнутым подмножеством $W \subset \mathbb{P}^N$, заданным уравнениями $u_{i,j}u_{p,q} = u_{i,q}u_{p,j}$, при которой произведению аффинных карт $\mathbb{A}^n_i \times \mathbb{A}^m_j$ (здесь $\mathbb{A}^n_i$ это аффинная карта в $\mathbb{P}^n$, заданная условием $x_i \neq 0$, а $\mathbb{A}^m_j$ это аффинная карта в $\mathbb{P}^m$, заданная условием $y_j \neq 0$) соответствует аффинное открытое подмножество $W \cap \mathbb{A}^N_{i,j}$, где $\mathbb{A}^N_{i,j} \subset \mathbb{P}^N$ задано условием $u_{i,j} \neq 0$. Покажите, что

$W \cap A^N_{i,j}$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{m+n}$. Объясните, почему из этого следует, что отображение Сегре, определеное вначале просто как отображение множества $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ в $W \subset \mathbb{P}^N$ (мы показали биективность этого отображения) на самом деле является изоморфизмом прямого произведения $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, определенного как абстрактное алгебраическое многообразие, с проективным многообразием $W \subset \mathbb{P}^N$.

(6) Покажите, что в случае $m = n = 1$ в условии предыдущей задачи требуемый изоморфизм задается (для $i = j = 0$) стереографической проекцией π квадрики $W \subset \mathbb{P}^3$, заданной в проективных координатах $(u_{0,0} : u_{0,1} : u_{1,0} : u_{1,1})$ уравнением $u_{0,0}u_{1,1} = u_{0,1}u_{1,0}$, из точки $(1 : 0 : 0 : 0)$ на плоскость $\mathbb{P}^2$ с координатами $(u_{0,1} : u_{1,0} : u_{1,1})$, то есть $\pi : W \to \mathbb{P}^2$ задается формулами $\pi((u_{0,0} : u_{0,1} : u_{1,0} : u_{1,1})) = (u_{0,1} : u_{1,0} : u_{1,1})$. Покажите, что эта стереографическая проекция π является бирациональным изоморфизмом, найдите открытое подмножество $U \subset W$, на котором π регулярно, и его открытое подмножество $V \subset U$, на котором π является изоморфизмом, и опишите действие π на множестве $U \setminus V$. Найдите задание однородными формами обратного отображения $\pi^{-1} : \mathbb{P}^2 \to W$, и также найдите открытое подмножество в $\mathbb{P}^2$, на котором π^{-1} регулярно, и меньшее открытое подмножество, на котором π^{-1} является изоморфизмом, и опишите действие π^{-1} на разности этих открытых множеств.