

# Группа кос, квантовые группы и приложения

## Листок 1. ГРУППА КОС

Рекомендуемый срок сдачи: 12.02.2025

1. а) Найдите все неэквивалентные неразложимые двумерные представления группы кос  $B_3$ :

$$\rho_V : B_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V), \quad \dim V = 2.$$

б) Определите, какие из этих представлений являются неприводимыми.

*Подсказка:* решение упрощается, если учесть, что артиновы генераторы группы кос сопряжены друг другу, а значит их спектры в любом представлении совпадают.

2. Докажите, что группу кос  $B_n$  можно задать с использованием набора генераторов  $\{b_1^{\pm 1}, c_n^{\pm 1}\}$ , где  $c_n$  – оператор перестановки концов нитей по циклу  $n \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow n$ :

$$c_n := b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

Здесь  $b_i$  – артиновы генераторы элементарных заплетений  $i$ -й и  $(i+1)$ -й нитей (см. записки лекций, стр.9–10).

Предъявите (полный!) список соотношений для такого набора генераторов  $B_n$ .

3. Группу кос  $B_n$  можно задать с использованием набора генераторов  $\{(ij)^{\pm 1}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ , где  $(ij)$  – операторы перестановки концов пары нитей с номерами  $i$  и  $j$ :

$$(i \ i+1) := b_i, \quad (ij) := b_{j-1}(i \ j-1)b_{j-1}^{-1} = (b_{j-1}b_{j-2} \dots b_{i+1})b_i(b_{j-1}b_{j-2} \dots b_{i+1})^{-1} \quad \forall j > i + 1.$$

Докажите, что полный набор соотношений для этих генераторов имеет вид

$$\begin{aligned} (ij)(kl) &= (kl)(ij) \quad \forall i, j, k, l : i < j < k < l \text{ или } k < i < j < l, \\ (ij)(ik) &= (ik)(jk) = (jk)(ij) \quad \forall i < j < k. \end{aligned}$$

4. Завершите доказательство Утверждения 2 из записок лекций (см. стр.16), то есть докажите, что для генераторов  $A_{ij} := (ij)^2$  группы крашенных кос выполняются соотношения

$$A_{13}(A_{14}A_{24}A_{34}) = (A_{14}A_{24}A_{34})A_{13}. \quad (1)$$

*Подсказка:* Воспользуйтесь соотношениями для операторов  $(ij)$ .

5. Пусть  $F$  – свободная группа;  $\{A\}$  и  $\{B\}$  два набора элементов этой группы;  $\langle\{A\}\rangle$  и  $\langle\{B\}\rangle$  – их нормальные замыкания в  $F$ . Докажите изоморфность фактор-групп

$$(F / \langle\{A\}\rangle) / \langle\{B\}\rangle \simeq (F / \langle\{B\}\rangle) / \langle\{A\}\rangle \simeq F / \langle\{A \cup B\}\rangle.$$

6. <sup>\*1</sup> Завершите доказательство Утверждения 3 из записок лекций (см. стр.18), то есть выведите формулы сопряжения:

$$A_{13}A_{24}A_{13}^{-1} = (A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})A_{24}(A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})^{-1}, \quad (2)$$

$$A_{13}^{-1}A_{24}A_{13} = (A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})A_{24}(A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})^{-1}. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Звездочкой помечены дополнительные задачи.

Подсказка: Представьте соотношение (1) в виде формулы сопряжения оператора  $(A_{14}A_{24}A_{34})$  и используйте формулы сопряжения, выведенные при доказательстве Утверждения 3 в записках лекций.

Замечание: Соотношения (1)-(3), сформулированные для набора индексов  $\{1, 2, 3, 4\}$ , остаются справедливыми при замене  $\{1, 2, 3, 4\} \mapsto \{i, j, k, l\} \forall i < j < k < l$ . Доказательства для всех наборов  $\{i, j, k, l\}$  идентичны.

**7.\* а)** Докажите, что внутренний автоморфизм группы кос типа  $\mathbf{B}_{n-1}$ , задаваемый элементом

$$T_n := B_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1},$$

порождает циклический сдвиг генераторов:

$$b_{i+1} = T_n b_i T_n^{-1} \quad \forall i = 1, \dots, n-2, \quad b_1 = T_n^2 b_{n-1} T_n^{-2}.$$

**б)** Убедитесь, что отображение артиновых генераторов аффинной группы кос типа  $\tilde{\mathbf{A}}_{n-1}$  в группу кос типа  $\mathbf{B}_{n-1}$

$$b_i \mapsto b_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad b_0 \mapsto T_n^{-1} b_1 T_n = T_n b_{n-1} T_n^{-1}$$

порождает гомоморфизм групп.