Задачи для подготовки к контрольной 15 февраля

1. Извлечь корень квадратный из матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Написать полярное разложение для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Если A симметричный оператор, то все пространство есть ортогональная прямая сумма его ядра и его образа. Доказать.

4. Найти оператор, сопряженный оператору отражения R_v в зеркале $v^\perp$.

5. Пользуясь алгоритмом Грама-Шмидта (или вольным стилем), докажите, что любая квадратная матрица есть произведение ортогональной матрицы на верхнетреугольную.

6. Матрица называется ортогональной, если матрица, ей обратная, совпадает с ее транспонированной. Докажите, что ортогональные матрицы образуют группу по умножению. Сколько матриц в группе ортогональных матриц третьего порядка над полем из двух элементов?

7. Для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ имела решения, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбец b был ортогонален пространству решений однородной системы $A^t y = 0$. Доказать.

8. Вычислить определитель матрицы $\exp A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Операторы A и B таковы, что $B^* A = 0$. Доказать, что $\mathrm{Im} A \perp \mathrm{Im} B$.

10. Спектр симметричного оператора A равен $(2, 2, 2, 3, -1)$. Вычислить $\max(Ax, x)$, где x пробегает множество векторов единичной длины.

11. Сопряженный к ниль-оператору так же является ниль-оператором, причем того же индекса нильпотентности. Доказать.

Потруднее:

12. A и B симметричные положительные операторы. Известно.что $A^2 = B^2$. Доказать, что $A = B$.

Еще труднее:

13. A и B симметричные положительные операторы. Известно, что $A > B$. Доказать, что $A^{-1} < B^{-1}$.