Листок 1
ЭЛЕМЕНТЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. а) Докажите что следующие определения гессиана эквивалентны

$$\mathrm{Hess}_g f(X,Y) = (XY - \nabla_X Y)f = \langle \nabla_X \nabla^g f, Y\rangle = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\nabla^g f} g)(X,Y) \quad \text{для любых } X, Y \in \Gamma(TM).$$

б) Докажите, что следующие определения лапласиана эквивалентны

$$\Delta_g = \mathrm{div}_g \nabla^g = \mathrm{tr}_g \mathrm{Hess}_g.$$

2. Пусть M – гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$. Докажите, что для всякой функции $f \in C^\infty(\overline{M})$ верно, что

$$\Delta_{\overline{M}} f = \Delta_M f + \mathrm{Hess}_{\overline{M}} f(\nu,\nu) + H_M \nu(f).$$

Здесь $\Delta_{\overline{M}}$ и Δ_M – лапласианы на $\overline{M}$ и M, соответственно, $\mathrm{Hess}_{\overline{M}}$ – гессиан на $\overline{M}$, ν – векторное поле единичных нормалей к M.

3. Докажите сокращенное тождество Бьянки

$$dR_g = 2\mathrm{div}_g(\mathrm{Ric}_g).$$

Выведите отсюда, что $\mathrm{div}_g G = 0$.

4. *(Эйнштейново многообразие)* Пусть (M,g) – риманово многообразие $\dim M \geqslant 3$ такое, что $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$, где $\lambda \in C^\infty(M)$. Докажите, что $\lambda = const$. Найдите эту константу.

5. Пусть M – гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, на которую индуцируется метрика g. Пусть нормальное расслоение NM тривиально. Докажите сокращенное уравнение Гаусса

$$R_{\overline{g}} = R_g + 2\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu,\nu) + |B_M|^2_{\overline{g}} - H_M^2,$$

где B_M – вторая квадратичная форма M, H_M – средняя кривизна M в $(\overline{M}, \overline{g})$.

6. Пусть M – гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$. Докажите сокращенное уравнение Кодацци

$$\mathrm{div}_M B_M - dH_M = \mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu, \cdot),$$

где div_M – дивергенция на M с индуцированной с $\overline{g}$ метрикой.

7. Пусть метрики $\widetilde{g}$ и g на M^n, $n > 2$ конформны, т.е. существует функция $u \in C^\infty(M)$ такая, что $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$. Докажите, что

$$R_{\widetilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g u.$$

8. Докажите, что подмногообразие риманова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

9. а) Докажите, что плоскость, катеноид и геликоид являются минимальными поверхностями в $\mathbb{E}^3$.

б) Докажите, что экваториальные сферы в круглой n-мерной сфере являются вполне геодезическими гиперповерхностями.

в) Докажите, что горизонт в пространстве Шварцшильда является вполне геодезической гиперповерхностью.

г) Докажите, что круглые сферы в $\mathbb{E}^n$ являются вполне омбилическими подмногообразиями.

10. *(Статическое многообразие)* Пусть (M^n, g) – риманово многообразие $n \geqslant 3$ такое, что существует ненулевое решение $V \in C^\infty(M)$ следующего уравнения

$$\mathrm{Hess}_g V - \Delta_g V g - V \mathrm{Ric}_g = 0.$$

а) Считая известным, что $\Sigma = V^{-1}(0)$ является регулярным подмногообразием (если не пусто), докажите, что оно вполне геодезично.

б) Докажите, что $\Delta_g V = -\dfrac{R_g}{n-1} V$.

в**) Докажите, что $R_g = const$ (смотри статьи [1] и [2]).

11. *(Статическое многообразие с краем)* Пусть (M^n, g) – статическое многообразие $n \geqslant 3$ и $\partial M \neq \varnothing$. Предположим, что V дополнительно удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} g - V B_{\partial M} = 0 \quad \text{вдоль } \partial M,$$

где η – внешнее единичное нормальное поле к границе.

а) Докажите, что ∂M вполне омбилично.

б) Докажите, что $\dfrac{\partial V}{\partial \eta} = \dfrac{H_{\partial M}}{n-1} V$ вдоль ∂M.

в) Докажите, что $H_{\partial M} = const$.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] A. E. Fischer and J. E. Marsden. Deformations of the scalar curvature.

[2] J. Corvino. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations.