# Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Весна 2025.

## Задания с 11 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) а) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ неприводимо и проективно и $\dim X = k$. Докажите, что общее $n-k$ мерное проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$ пересекает $X$ в конечном числе точек. Другими словами, если мы обозначим через $G = Gr(n-k+1, n+1)$ многообразие всех проективных подпространств $\mathbb{P}^{n-k} \subset \mathbb{P}^n$, то существует такое открытое подмножество $U \subset G$, что для $L \in U$ пересечение $L \cap X$ конечно.

б) Покажите, что существует такое открытое подмножество $W \subset U$, что для $L \in W$ число $\#(L \cap X)$ постоянно и равно некоторому $d$, а при $L \in U \setminus W \quad \#(L \cap X) \leq d$. Это число $d$ называется степенью $X$.

(2) Пусть $F(x_0 : \ldots : x_n) = \sum a_{k_0,\ldots,k_n} x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n}$ однородная форма степени $d$ (т.е. $\sum k_i = d$). Докажите, что существует такой многочлен $P_d(\ldots, a_{k_0,\ldots,k_n}, \ldots)$ от коэффициентов этой формы, что гиперповерхность $V(F) \subset \mathbb{P}^n$ особа тогда и только тогда, когда $P_d(\ldots, a_{k_0,\ldots,k_n}, \ldots) = 0$. (Другими словами, уравнения неособых гиперповерхностей образуют открытое подмножество в пространстве форм степени $d$, являющееся дополнением до гиперповерхности, заданной уравнением $P_d = 0$.) Укажите явный вид многочлена $P_2$.

(3) Взаимное расположение прямой и кривой на плоскости. Пусть $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ — неприводимая кривая степени $d$, (т.е. уравнением кривой $X$ является однородная форма $F$ степени $d$), $l \subset \mathbb{P}^2$ — прямая. Тогда ограничение формы $F$ на $l$ является многочленом степени $d$, и пусть $k_1, \ldots, k_s$ — кратности его корней ($\sum k_i = d$); упорядочим их в порядке убывания. Назовем тогда набор $(k_1, \ldots, k_s)$ типом пересечения кривой и прямой.

а) Покажите, что для любой неприводимой кривой $X$ прямые, пересекающие $X$ с типом $(1, 1, \ldots, 1)$ (т.е. прямые, трансверсально пересекающий $X$ в каждой точке пересечения) составляют открытое подмножество $U_X$ в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, являющееся дополнением до некоторой кривой.

б) Покажите, что для любой неприводимой кривой $X$ прямые, пересекающие $X$ с типом $(2, 1, \ldots, 1)$ (будем называть такие прямые *обыкновенными касательными*) образуют непустое открытое подмножество в замкнутом множестве $\check{\mathbb{P}}^2 \setminus U_X$.

в) Покажите, что для каждого типа, за исключением $(1, 1, \ldots, 1)$ и $(2, 1, \ldots, 1)$, имеются две возможности: либо (а) для любой неприводимой кривой имеется конечное число прямых с таким типом пересечения; либо (б) в пространстве $\mathbb{P}(S^d V^*)$ кривых степени $d$ имеется открытое подмножество $U$ такое, что для любой неприводимой кривой из $U$ и любой прямой $l$ их тип пересечения не таков. Выясните, какая из возможностей реализуется для каждого из следующих случаев:

- $(3, 1, \dots, 1)$ $(d \geq 3)$ — такая касательная называется *обыкновенной касательной перегиба*, а их точка касания — *обыкновенной точкой перегиба*;
- $(2, 2, \dots, 1)$ $(d \geq 4)$ — такая касательная называется *обыкновенной двойной касательной*;
- $(4, 1, \dots, 1)$ $(d \geq 4)$;
- $(3, 2, 1 \dots, 1)$ $(d \geq 5)$;
- $(2, 2, 2, 1 \dots, 1)$ $(d \geq 6)$.

(4) а) Мы в прошлом семестре доказывали, что любое неприводимое подмногообразие в $\mathbb{P}^n$ коразмерности 1 является гиперповерхностью, т.е. является множеством нулей некоторой однородной формы $F$ степени $d$. Покажите, что то же верно и для неприводимого подмногообразия коразмерности 1 в прямом произведении $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$: оно также задается одним уравнением, а именно некоторой формой, однородной отдельно по каждой группе переменных, соответствующих каждому $\mathbb{P}^{n_i}$.

б) Мы знаем, что норм-кубика $v_{1,3}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ лежит на некоторой неособой квадрике $Q$ в $\mathbb{P}^3$ (имеется даже двумерное семейство таких квадрик). С другой стороны, квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3$ это образ отображения Сегре $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. Следовательно, норм-кубика $v_{1,3}(\mathbb{P}^1)$ задается на $Q$ некоторой формой $F(s_0 : s_1, t_0 : t_1)$(здесь $(s_0 : s_1)$ — координаты на одном сомножителе $\mathbb{P}^1$, а $(t_0 : t_1)$ — на другом), однородной степени $d_1$ по переменным $(s_0 : s_1)$ и однородной степени $d_2$ по переменным $(t_0 : t_1)$. Найдите числа $d_1$ и $d_2$.