# Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

## Задачи с 1 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) Докажите, что в конечном кольце любой ненулевой элемент является либо обратимым, либо делителем нуля.

(2) Перечислите все (с точностью до изоморфизма) кольца из 4 элементов. (Напоминаем, что в нашем курсе для краткости под словом "кольцо" понимается коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.)

(3) Докажите, что линейный оператор $f : V \to V$ на некотором (не обязательно конечномерном!) векторном пространстве $V$ над некоторым полем $\mathbb{K}$ идемпотентен (т.е. $f^2 = f$ и $f \neq 0$ и $f \neq \mathrm{Id}_V$), тогда и только тогда, когда он является проектированием на некоторое подпространство, т.е. когда существует такое разложение $V$ в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$, так что любой вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, и тогда действие оператора состоит в том, что $f(v) = u$. (Отметим, что в конечномерном случае это означает, что в подходящем базисе матрица этого оператора имеет вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.)

(4) Напомним, что мы выяснили, что диофантово уравнение

$$ax - by = 1$$

имеет целые решения тогда и только тогда, когда $(a, b) = 1$, причем решение можно найти подбором, перебрав не более чем $b$ значений $x$ (или $a$ значений $y$) подряд. Намного более быстрый способ нахождения решения основан на алгоритме Евклида, и на занятии был продемонстрирован один из вариантов реализации этого алгоритма на языке цепных дробей, и дома было предложено доказать его корректность. А именно, требуется доказать следующее утверждение.

Пусть $a/b$ и $y/x$ две несократимые дроби, имеющие следующие разложения в цепные дроби:

$$a/b = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}}}} \qquad y/x = s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{s_{n-1}}}}}$$

Тогда

$$ax - by = \pm 1.$$