Листок 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Пусть $(\overline{M}^n, \overline{g})$ – риманово многообразие положительной кривизны Риччи. Докажите, что в нём нет замкнутых устойчивых минимальных гиперповерхностей с тривиальным нормальным расслоением.

2. Докажите следующие утверждения про первое собственное значение конформного лапласиана на замкнутом римановом многообразии (M, g)

$$\begin{aligned}
\exists\ \widetilde{g} \in [g]\colon R_{\widetilde{g}} < 0 &\Longleftrightarrow \lambda_1(L_g) < 0;\\
\exists\ \widetilde{g} \in [g]\colon R_{\widetilde{g}} = 0 &\Longleftrightarrow \lambda_1(L_g) = 0;\\
\exists\ \widetilde{g} \in [g]\colon R_{\widetilde{g}} > 0 &\Longleftrightarrow \lambda_1(L_g) > 0.
\end{aligned}$$

3. Пусть$(\overline{M}^n, \overline{g})$ – риманово многообразие положительной скалярной кривизны, а M – замкнутая устойчивая минимальная поверхность с тривиальным нормальным расслоением. Докажите, что она Ямабе-положительна. Выведите также, что

$$\lambda_1(J_M) \leqslant \frac{1}{2}\lambda_1(L_g).$$

4. Докажите, что под действием потока эквидистантных гиперповерхностей вдоль поля $X = \varphi\nu$ с начальной гиперповерхностью M в $(\overline{M}^n, \overline{g})$ средняя кривизна меняется по закону

$$\frac{\partial H_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\Delta_M\varphi - (\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu,\nu) + |B_M|^2_{\overline{g}})\varphi + \nabla_X \vec{H}_t.$$

5*. Докажите, что при деформации метрики $g_t = g + ht$ скалярная кривизна $R_t := R_{g_t}$ на многообразии M^n меняется по закону

$$\frac{\partial R_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\Delta_g(\mathrm{tr}_g h) + \mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h) - \langle \mathrm{Ric}_g, h\rangle_g,$$

где $\mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h) := \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} h_{ij}$ (следуйте указаниям к упражнению 1.18 в [1]).

6. Пусть (M, g) – замкнутое риманово многообразие неотрицательной скалярной кривизны, но не Ямабе-положительное. Докажите, что оно Риччи-плоское.

7. Докажите, что многообразие Шварцшильда массы m является асимптотически шварцшильдовским (и, следовательно, асимптотически плоским) с двумя концами, каждый из которых имеет массу m.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] D.Lee. Geometric Relativity.