

Семинар 2.

В пространстве \mathbb{P}^3 фиксированы две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и рассматриваются пучки плоскостей \check{l}_1 и \check{l}_2 , проходящих через эти прямые. Как мы знаем из обсуждений на семинаре, плоскости этих пучков соответствуют точкам прямых \check{l}_1 и \check{l}_2 в двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^3$. Зафиксируем проективное отображение $\varphi : \check{l}_1 \rightarrow \check{l}_2$. *Невырожденная квадратика по Штейнеру* Q определяется как множество точек в \mathbb{P}^3 , образуемое прямыми $\pi \cap \varphi(\pi)$ пересечения пар соответственных плоскостей $\pi \in \check{l}_1$ и $\varphi \in \check{l}_2$ в этих пучках, то есть $Q = \bigcup_{\pi \in \check{l}_1} (\pi \cap \varphi(\pi))$.

Задача 1. Докажите, что невырожденная квадратика по Штейнеру Q является невырожденной квадратикой в обычном смысле, то есть поверхностью степени 2 в \mathbb{P}^3 ; это означает, что $Q = V(F)$, где $F = F(x_0, \dots, x_3)$ – невырожденная квадратичная форма (то есть однородный многочлен степени 2) от однородных координат $(x_0 : \dots : x_3)$ в \mathbb{P}^3 .

Задача 2. Покажите, что в обозначениях, введенных выше, на квадратике Штейнера Q через каждую точку $x \in l_1$ проходит единственная прямая вида $\pi \cap \varphi(\pi)$, и эта прямая пересекает прямую l_2 в некоторой точке y , так что получаем отображение $\psi : l_1 \rightarrow l_2$, $x \mapsto y$. Докажите, что ψ – проективное отображение и убедитесь, что $Q = \bigcup_{x \in l_1} \langle x, \psi(x) \rangle$. (Здесь $\langle x, \psi(x) \rangle$ – прямая через точки x и $\psi(x)$.)

Задача 3. В условиях предыдущей задачи покажите, как восстановить отображение $\varphi : \check{l}_1 \rightarrow \check{l}_2$ по отображению $\psi : l_1 \rightarrow l_2$.

Задача 4. В предыдущих обозначениях возьмем произвольную прямую l_0 , скрещивающуюся с прямыми l_1 и l_2 и рассмотрим множество $X = \bigcup_{x \in l_0} \langle x, l_1 \rangle \cap \langle x, l_2 \rangle$. (Здесь $\langle x, l_i \rangle$ – плоскость через точку x и прямую l_i , $i = 1, 2$.) Докажите, что X – квадратика по Штейнеру.