Семинар 1.

В проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ с однородными координатами $(x_0 : ... : x_n)$ рассматривается гиперповерхность $X = V(F)$, где $F = F(x_0, .., x_n)$ - форма (то есть однородный многочлен из $\mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$) степени $d \geqslant 1$. На прямой $l \subset \mathbb{P}^n$, проходящей через точку $a = (a_0, ..., a_n) \in X$, введем аффинную координату t такую, что точка a имеет координату $t = 0$, а проективные координаты произвольной точки $x \in l$ можно выбрать в виде $x_0 = a_0 + b_0 t, ..., x_n = a_n + b_n t$. Подставляя эти координаты в форму $F(x_0, .., x_n)$, получаем многочлен $F(t) := F(a_0 + b_0 t, ..., a_n + b_n t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_d t^d$. Условие $a \in X$ означает, что $t = 0$ является корнем многочлена $t = 0$, то есть что $\alpha_0 = 0$. Если помимо условия $\alpha_0 = 0$ выполняется условие $\alpha_1 = 0$, то прямая $l \subset \mathbb{P}^n$, называется *касательной к гиперповерхности* X в точке a. Другими словами, прямая l является касательной к X в точке a, если либо многочлен $F(t)$ не равен тождественно нулю и имеет корень $t = 0$ кратности $\geqslant 2$, либо если многочлен $F(t)$ тождественно равен нулю. (В последнем случае прямая l лежит на X. Таким образом, всякая прямая, лежащая на X, является касательной к X в каждой своей точке.) Подмножество $\mathbb{T}_a X$ в $\mathbb{P}^n$, состоящее из точек, лежащих на всех касательных прямых к X в точке a, называется *касательным пространством к гиперповерхности* X в точке a. Если $\mathbb{T}_a X = \mathbb{P}^n$, то точка $a \in X$ называется *особой точкой гиперповерхности* X. В противном случае точка $a \in X$ называется *неособой (или гладкой) точкой гиперповерхности* $X = V(F)$.

Задача 1. Докажите, что если точка $a \in X$ является гладкой точкой гиперповерхности $X = V(F)$, то $\mathbb{T}_a X$ является гиперплоскостью в $\mathbb{P}^n$. Найдите уравнение гиперплоскости $\mathbb{T}_a X$.

Задача 2. *Дифференцированием* ассоциативной алгебры A над полем $\mathbf{k}$ называется линейное над $\mathbf{k}$ отображение $D: A \to A$, удовлетворяющее правилу Лейбница $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.
1) Пусть $A = \mathbf{k}[t]$. Докажите, что произвольного многочлена $f(t) \in \mathbf{k}[t]$ верно равенство $D(f(t)) = f'(t) \cdot D(t)$, где $f'(t)$ - производная многочлена $f(t)$.
2) Пусть D - дифференцирование алгебры $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$. Напишите равенство, аналогичное предыдущему, для $D(f)$, где $f = f(t_1, ..., t_n) \in A$.

Задача 3. В аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ рассмотрим квадрику X с уравнением $z = xy$. Мы показали на семинаре, что через точку $a = (1, 1, 1) \in X$ проходят две прямые l_1 и l_2, лежащие на X.
1) Докажите, что $\mathbb{T}_a X \cap X = l_1 \cup l_2$.
2) Найдите уравнения всех прямых на X.

Задача 4. Найдите уравнения всех прямых на квадрике X с уравнением $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$.