

Семинар 17

Геометрия конечномерного аффинного пространства 1

0. Доказать, что непустое пересечение аффинных плоскостей является аффинной плоскостью.

1. Доказать, что плоскость $A + W$, проходящая через точку A с направляющим подпространством W , не зависит от выбора на ней точки A .

2. Доказать, что через любые две различные точки аффинного пространства проходит единственная прямая.

3. Показать, что через $(k + 1)$ -элементное семейство точек аффинного пространства, не лежащих в $(k - 1)$ -мерной плоскости, проходит единственная k -мерная плоскость.

4. Доказать, что плоскости $A + W_1$ и $B + W_2$ тогда и только тогда пересекаются, когда вектор \overrightarrow{AB} лежит в пространстве $W_1 + W_2$.

5. Доказать, что через любые две непересекающиеся плоскости аффинного пространства можно провести параллельные гиперплоскости (частный случай: теорема школьной стереометрии о скрещивающихся прямых).

6. Рассмотрим в аффинном пространстве две непересекающиеся плоскости $A + W_1$ и $B + W_2$. Найти плоскость минимальной размерности, которая содержит первую из них и параллельна второй.

7. В арифметическом аффинном пространстве $\text{Aff}(\mathbb{R}^4)$ (модель Кентавр) найти параметрическое уравнение плоскости, заданной системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 + 3X_4 = 1 \\ X_1 + 2X_2 - X_3 + 2X_4 = 3 \\ X_1 - X_2 - 4X_3 + 5X_4 = -3. \end{cases}$$

8. В арифметическом аффинном пространстве $\text{Aff}(\mathbb{R}^5)$ (модель Кентавр) задать системой линейных уравнений плоскость с параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} X_1 = 2 + t_1 + t_2 \\ X_2 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ X_3 = -3 + t_1 + t_2 \\ X_4 = 3 + 3t_1 + t_2 \\ X_5 = 1 + t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

9*. Про плоскость n -мерного аффинного пространства известно, что она отлична от точки и что она параллельна любой плоскости, которая с ней не пересекается. Доказать, что размерность такой плоскости равна $(n - 1)$. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

10*. Рассмотрим трехмерное аффинное пространство над полем из двух элементов. Сколько в нем а) точек, б) прямых, в) плоскостей? Сколько точек лежит на каждой прямой? Сколько прямых проходит через одну точку? Сколько прямых лежат в одной плоскости? Сколько прямых параллельных данной прямой? Сколько...