

Листок 3
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЯ I

1. Докажите, что для всякого пространства-времени (N, \mathbf{g}) верно следующее:

- а) для всякой точки $p \in N$ $I^+(p)$ открыто в N ;
- б) для всякого множества $S \subset N$ $I^+(S)$ открыто в N ;
- в) $\text{Int}(J^+(S)) = I^+(S)$;
- г) $J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$.

2. Докажите, что компактное пространство-время всегда содержит замкнутую времени-подобную кривую, т.е. нарушается условие хронологичности.

3. Придумайте пространство-время, для которого выполнено условие хронологичности, но не выполнено условие причинности.

4. Пусть M – гиперповерхность Коши в пространстве-времени (N, \mathbf{g}) . Докажите, что существует гомеоморфизм между N и $\mathbb{R} \times M$ и всякая поверхность Коши в (N, \mathbf{g}) гомеоморфна M .

5. Докажите, что статическое пространство-время, удовлетворяет уравнению Эйнштейна в вакууме с космологической постоянной Λ тогда и только тогда, когда временной срез является статическим многообразием.

6. а) Пусть $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ с метрикой $g = \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$, где $V > 0$ дифференцируема.

Докажите, что

$$R_g = \frac{n-1}{r^2} [(n-2)(1-V(r)) - rV'(r)].$$

б) Пусть $\kappa = \text{const}$. Докажите, что единственная сферическая метрика постоянной скалярной кривизны κ имеет вид (с точностью до диффеоморфизма) метрики из пункта а) с

$$V(r) = 1 - \frac{m}{2r^{n-2}} - \frac{\kappa}{n(n-1)} r^2,$$

где $m = \text{const}$. Если $\kappa > 0$, то метрика из пункта а) называется метрикой *Шварцшильда-де Ситтера*, если $\kappa = 0$, то метрика из пункта а) называется метрикой *Шварцшильда* и обозначается g_m , если $\kappa < 0$, то метрика из пункта а) называется метрикой *Шварцшильда-анти-де Ситтера*.

в) Докажите, что существует такая радиальная координата s на $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, что

$$g_m = \left(1 + \frac{m}{2s^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} (ds^2 + s^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

Такие координаты называются *изотропными*.

г) Покажите, что отображение $s \mapsto \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{n-2}} s^{-1}$ является изометрией метрики g_m из пункта в) и выведите отсюда, что $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ с метрикой g_m полно.