

Листок 1

Во всех задачах действие происходит на школьной плоскости E^2 , s -окрестность точки – это открытый диск радиуса s с центром в точке. Текст большинства задач – это утверждения, которые нужно доказать или опровергнуть.

Хаусдорфовость факторпространств

0. Факторпространство плоскости по дискретной группе ее движений хаусдорфово.

Локальная конечность

Семейство T_1, T_2, T_3, \dots (автоматически счетное) подмножеств плоскости называется локально конечным, если у любой точки плоскости существует s -окрестность, которая пересекает лишь конечное число элементов семейства (некоторые из множеств семейства могут совпадать!).

1. Для локальной конечности семейства необходимо и достаточно, чтобы любое компактное множество плоскости пересекало лишь конечное число элементов семейства.

Семейство замкнутых областей называется покрытием, если никакие два его элемента не пересекаются по внутренним точкам.

Упаковка, покрывающая всю плоскость, называется замощением.

2. Если для некоторой упаковки существуют такие положительные числа r, R , что для любого множества T_i из упаковки найдутся замкнутый объемлющий диск радиуса R и вложенный открытый диск радиуса r , то упаковка локально конечна.

Замощения

3. Привести пример не локально конечного замощения плоскости треугольниками.

4. Каждое локально конечное замощение семейством замкнутых выпуклых ограниченных областей является замощением выпуклыми многоугольниками.

5. Пусть любая плитка замощения плоскости является правильным выпуклым n -угольником. Какие значения может принимать n ? (не требуется, чтобы все плитки были равны, а замощение было бы замощением ребро-в-ребро).

(r, R) -система Делоне

6. Любые две точки (r, R) -системы Делоне можно соединить ломаной, с вершинами в системе, длина звеньев которой не превосходит по длине $2R$.

7. Точки системы, попавшие в шар радиуса $2R$, не могут находиться на одной прямой.

8. Отношение $r/R \leq 2$.

Области Вороного

9. Нарисуйте области Вороного для точечного семейства вершин клетчатой бумаги.

10. Два шоссе пересекаются под прямым углом. В 100 метрах от первого и в двухстах метрах от второго находится Столовая. Нарисуйте геометрическое место таких точек плоскости, которые находятся от Столовой на расстоянии, меньшем их расстояния от любого из двух шоссе.