Группы 2

AC8⋄1. Найдите орбиты естественного действия группы на векторном пространстве для групп:

а) $\mathrm{GL}_n(V)$;

б) O_n;

в) группа обратимых операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ диагональны;

г) группа обратимых операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ верхнетреугольные;

AC8⋄2. Покажите, что сопоставление матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ дробно-линейного преобразования $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ это гомоморфизм групп. Какая операция подразумевается в образе? Найдите ядро.

AC8⋄3. Покажите, что все подгруппы коммутативной группы нормальные.

AC8⋄4. Покажите, что знакопеременная группа A_n это нормальная подгруппа симметрической группы S_n. Какая получится фактор группа S_n/A_n.

AC8⋄5. Покажите, что группа $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ это нормальная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. Может ли $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ оказаться подгруппой конечного индекса? Какие конечные индексы возможны? Найдите $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)/\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$.

AC8⋄6. Покажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

AC8⋄7. Найдите все нормальные подгруппы в группах: **а)** S_3; **б)** A_4; **в)** S_4.

AC8⋄8. Какие из трех матриц сопряжены между собой в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

AC8⋄9. Для $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ обратимой матрицы и $h \in M_n(\mathbb{C})$ произвольной матрицы определим $g(h) = ghg^{-1}$.

а) Покажите, что задано действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на пространстве всех матриц.

б) Опишите орбиты этого действия.

AC8⋄10. Покажите, что в группе ортогональных линейных опереторов O_2 любые две симметрии сопряжены.

AC8⋄11. Простая группа — группа, не имеющая нормальных подгрупп, отличных от всей группы и единичной подгруппы. Докажите, что A_5 простая группа.