Семинар 3.

Всюду $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$, $\quad \mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. В проективном пространстве $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ дана квадрика Q с уравнением $F(x) = 0$, где $F(x) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}x_i x_j$ - квадратичная форма. Для произвольной точки $a = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ мы определили *поляру* P_aQ точки a относительно квадрики Q как подпространство в $\mathbb{P}^n$, заданное (линейным по x) уравнением $B(a,x) = 0$, где билинейная симметрическая форма $B(x,y)$ есть *поляризация* квадратичной формы F, то есть $B(x,y) = \frac{1}{2}(F(x+y) - F(x) - F(y))$.
Докажите, что уравнение поляры P_aQ можно записать в следующем равносильном виде:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Задача 2. В обозначениях предыдущей задачи пусть точка a не лежит на квадрике Q, пусть l – произвольная прямая через точку a и пусть $b = l \cap P_aQ$ – точка пересечения l с полярой точки a относительно Q.
1) Пусть прямая l пересекает квадрику Q в двух различных точках c и d. Докажите, (a,b,c,d) – гармоническая четверка точек.
2) В условиях предыдущего пункта пусть $c = d$, то есть l – касательная к Q прямая в точке c. Докажите, что в этом случае $b = c$. Как следствие, получаем отсюда, что $P_aQ \cap Q$ есть множество точек касания с Q касательных к Q прямых, проходящих через точку a.

Пусть $B(u,v)$ — симметрическая билинейная форма, заданная на векторном пространстве V, $\varphi_B : V \to V^*$ — линейное отображение, сопоставляющее вектору $u \in V$ линейную форму на V (т.е. элемент из V^*), значение которой на векторе $v \in V$ равно $B(u,v)$ (т.е. $\varphi_B(u)(v) = B(u,v)$). Мы видели, что и, наоборот, линейное отображение $\varphi :\ V \to V^*$ определяет билинейную форму B_φ на V (задаваемую формулой $B_\varphi = \varphi(u)(v)$), причем симметричность формы B_φ равносильна тому, что двойственное отображение $\varphi^* :\ V^{**} \to V^*$ совпадает с φ при каноническом отождествлении V с V^{**}. При этом имеем равносильное предыдущему определение квадрики в $\mathbb{P}(V)$: *квадрикой* Q в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ называется множество нулей квадратичной формы $F(x) = B(x,x)$. *Ядром формы* F (или, *ядром квадрики* Q) называется подпространство $K = \ker(\varphi_B) \subset V$. Квадрика (и формы B и F) называется *невырожденной*, если у нее нулевое ядро.

Задача 3. 1) В предыдущих обозначениях докажите, что если $W \subset V$ – такое подпространство, что $V = W \oplus K$, то ограничение формы F на W невырождено.
2) В условиях предыдущего пункта обозначим через $\widetilde{Q}$ невырожденную квадрику в $\mathbb{P}(W)$, задаваемую ограничением формы q на W. Покажите, что квадрика Q есть объединение всех прямых, соединяющих точки $\widetilde{Q}$ с точками из $\mathbb{P}(K)$. (Здесь $\mathbb{P}(W)$ и $\mathbb{P}(K)$ – это проективные подпространства в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$.)
3) В условиях предыдущего пункта покажите, что особые точки квадрики Q – это в точности точки $\mathbb{P}(K)$, т.е. $\mathrm{Sing}Q = \mathbb{P}(K)$.

Задача 4. Рассмотрим *поляритет относительно квадрики* Q как проективное отображение $p :\ \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}^3)^\vee,\ \ a \mapsto P_aQ$, и построим отображение в себя множества прямых в $\mathbb{P}^3$, сопоставляющее прямой l прямую p_lQ, называемую *полярой прямой* l *относительно квадрики* Q, где $P_lQ := \bigcap\limits_{a \in l} P_aQ$.
Пользуясь двумя сериями образующих прямых на квадрике Q, найдите геометрическую конструкцию прямой P_lQ в следующих возможных случаях:
1) $l \cap Q = \{x, y\}$ = две различные точки;
2) $l \cap Q$ - единственная точка;
3) l лежит на Q.