Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 2. Алгебры Гекке

Рекомендуемый срок сдачи: 05.03.2025

---

1. Докажите, что любой элемент алгебры $H_n(q)$ представим в виде линейной комбинации мононмов вида[1]

$$X_{i_1 i_2 \dots i_n} := C_{i_1 1} C_{i_2 2} \dots C_{i_n n},$$

где $i_k \in \{1, 2, \dots, k\}$, $C_{ij} := g_{j-1} g_{j-2} \dots g_i \;\; \forall\, i < j, \quad C_{ii} := 1$.

2. Элементы $j_i \in H_n(q)$

$$j_i := \frac{J_i - 1}{q - q^{-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

являются альтернативным набором генераторов подалгебры Юциса-Мэрфи. Представьте j_i в виде многочленов от артиновых генераторов g_k, $k = 1, \dots, n-1$. В предельном случае $q = 1$ определите, какие элементы симметрической группы S_n (т.е., перестановки) соответствуют слагаемым многочленов j_i (напомним: $H_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$).[2]

3. Докажите, что при $q^2 = -1$ алгебра $H_2(q)$ изоморфна неполупростой алгебре верхнетреугольных 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

4. На лекциях мы сформулировали правила построения допустимых индексов $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ для базисных векторов неприводимых представлений алгебры $H_n(q)$ (см. стр. 17 записок лекций):

- $a_1 = 1$;
- $\{q^2 a_i, q^{-2} a_i\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\} \neq \emptyset \;\; \forall i = 2, \dots, n$;
- $\forall\, i, j : \; i < j, \; a_i = a_j =: a \;\; \exists\, k, l : i < k < j, \; i < l < j, \; a_k = q^{-2} a, \; a_l = q^2 a.$

Докажите, что эти правила

а) следуют из Теоремы 1 и рассуждений на стр. 16-17 записок лекций;

б) позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между индексами α базисных векторов и стандартными таблицами Юнга, отвечающими всевозможным разбиениям $\lambda \vdash n$.

5. Рассмотрим алгебру $H_n(q)$ с ограничением на параметр $q : \;\; q^{2i} \neq 1, \; \forall i = 2, \dots, n$ (режим, когда алгебра полупроста).

---

[1] Как выяснится в дальнейшем, элементы $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ образуют линейный базис в $H_n(q)$.

[2] Набор $\{j_i\}_{i=1,\dots,n}$ был впервые использован независимо литовским теорфизиком Альгисом Юцисом и британским математиком Гвендолен Мерфи для изучения представлений симметрической группы S_n.

Как обсуждалось на лекциях, каждой стандартной таблице Юнга $t_{\lambda,\alpha}$, отвечающей разбиению $\lambda \vdash n$ (здесь α нумерует стандартные таблицы формы λ), можно сопоставить идемпотент $P_{\lambda,\alpha}$, принадлежащий подалгебре Юциса-Мерфи в $H_n(q)$ (т.е., являющийся полиномом от J_i, $i = 1, \dots, n$). Набор этих идемпотентов удовлетворяет свойствам ортогональности и полноты:

$$P_{\lambda,\alpha}\, P_{\mu,\beta} = \delta_{\lambda,\mu}\, \delta_{\alpha,\beta} P_{\lambda,\alpha}, \;\; \forall\, \lambda, \mu \vdash n, \; \forall \alpha, \beta, \qquad \textstyle\sum_{\lambda \vdash n,\, \alpha} P_{\lambda,\alpha} \;=\; 1.$$

Затем, каждому идемпотенту $P_{\lambda,\alpha} \in H_n(q) \subset H_{n+1}(q)$ можно сопоставить тождество в подалгебре Юциса-Мерфи алгебры $H_{n+1}(q)$ и далее с использованием этих тождеств строить полный набор взаимно ортогональных идемпотентов в $H_{n+1}(q)$.

Проведите явное построение набора идемпотентов для алгебры $H_3(q)$, $q^4 \neq 1, q^6 \neq 1$. Постройте соответствующие им тождества в $H_4(q)$, а затем по тождествам постройте полный набор ортогональных идемпотентов в $H_4(q)$. Какие их этих идемпотентов можно построить без дополнительных условий на параметр q? Какие условия на q нужно наложить для построения всех идемпотентов?

6. Для бакстеризованных генераторов алгебры Гекке

$$g_i(x) := g_i - \tfrac{q^x}{[x]_q} 1, \qquad x \in \mathbb{Z}, \qquad [x]_q := \tfrac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}},$$

проверьте выполнение, так называемых, *соотношений унитарности*

$$g_i(x)\, g_i(-x) \;=\; \tfrac{[x-1]_q [x+1]_q}{[x]_q^2} 1$$

и *уравнений Янга-Бакстера*

$$g_i(x)\, g_{i+1}(x+y)\, g_i(y) \;=\; g_{i+1}(y)\, g_i(x+y)\, g_{i+1}(x).$$

7. Постройте матрицы всех артиновых генераторов g_i алгебры $H_5(q)$ в базисе, диагонализующем элементы Юциса-Мерфи, для представлений, отвечающих разбиениям $\lambda_1 = \{3, 2\}$ и $\lambda_2 = \{3, 1, 1\}$.

8.*[3] Помимо алгебр Гекке известна еще одна серия конечномерных фактор-алгебр в $\mathbb{C}[B_n]$ — алгебры Бирман-Мураками-Венцля $W_n(q, \mu)$. Эта серия строится следующим образом.

Во-первых накладываются кубические соотношения на артиновы генераторы группы кос:

$$(g_i - q)(g_i + q^{-1})(g_i - \mu) = 0, \tag{1}$$

из которых, очевидно, следуют кубические условия и на элемент Юциса-Мерфи $J_2 = (g_1)^2$:

$$(J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2})(J_2 - \mu^2) = 0. \tag{2}$$

Наложив ограничения на параметры: $q \notin \{0, \pm 1, \pm i\}$, $\mu \notin \{0, \pm q, \pm q^{-1}\}$, можно теперь построить полный набор ортогональных идемпотентов в алгебре $W_3(q, \mu)$

$$A := \frac{(J_2 - q^2)(J_2 - \mu^2)}{(q^{-2} - q^2)(q^{-2} - \mu^2)}, \quad S := \frac{(J_2 - q^{-2})(J_2 - \mu^2)}{(q^2 - q^{-2})(q^2 - \mu^2)}, \quad K := \frac{(J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2})}{(\mu^2 - q^2)(\mu^2 - q^{-2})}. \tag{3}$$

[3] Звездочкой помечены дополнительные задачи.

Условия (1) однако недостаточно для получения серии конечномерных фактор-алгебр, при $n \geq 6$ они остаются бесконечномерны. Дополнив (1) условием

$$K(J_3 - 1) = 0 \tag{4}$$

мы получаем серию конечномерных фактор-алгебр $W_n(q, \mu)$, $\dim W_n = (2n-1)!!$.

Для башни алгебр Бирман-Мураками-Венцля

$$W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n \subset \ldots,$$

как и для алгебр Гекке, можно строить граф ветвления (диаграмму Брателли), сопоставляя вершинам графа картинки диаграмм Юнга, а переходам вдоль ребер графа процедуру присоединения клетки к диаграмме. При этом однако присоединяемая клетка может не только расположиться в одном из внутренних углов диаграммы, но и уничтожить клетку во одном из ее внешних углов. Таким образом вершины графа ветвления, отвечающие алгебре W_n, нумеруются всеми возможными разбиениями (диаграммами Юнга) чисел $n, n-2, n-4, \ldots, 1$ или 0. Например, трехмерной абелевой алгебре W_2 в графе ветвления отвечают три вершины, индексируемые разбиениями $\lambda_A = \{1,1\} \vdash 2$, $\lambda_S = \{2\} \vdash 2$, $\lambda_C = \{\} \vdash 0$. Они соответствуют идемпотентам A, S и K из формулы (3), отвечающим трем одномерным представлениям W_3.

Пользуясь описанной процедурой, продолжите граф ветвления алгебр Бирман-Мураками-Венцля до уровней W_4 и W_5 и определите размерности всех неприводимых представлений этих алгебр (в предположении, что алгебры полупросты).