

Семинар 19

Аффинная геометрия 2

Говорят, что две плоскости скрещиваются, если они не пересекаются, а их направляющие подпространства пересекаются по нулю.

1. Пусть $P_1 = A_1 + W_1, P_2 = A_2 + W_2$ – две плоскости аффинного пространства. Доказать, что
а) если $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, то $\dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$;

б) если $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, то $\dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1$.

2. Доказать, что для любых плоскостей аффинного пространства $\dim(P_1 + P_2 + \dots + P_s) \leq (\dim P_1 + \dim P_2 + \dots + \dim P_s) + (s - 1)$.

3. Найти размерность аффинной оболочки скрещивающихся плоскостей размерности 2 и 3.

4. Найти размерность аффинной оболочки семейства точек

$(-1, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-3, -1, 5, 4), (2, 2, -3, -3)$.

5. Плоскость P_1 задана уравнениями $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 - 4 = 6, 6X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 3X_4 = 2$, а плоскость P_2 уравнениями $X_1 = 1 - t_1, X_2 = 1 + 2t_1 + t_2, X_3 - 3 = 1 - 2t_1 + t_2, X_4 = 1 + t_1 + t_2$. Найти $\dim(P_1 + P_2)$ и $\dim(P_1 \cap P_2)$.

6. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку $(6, 5, 1, -1)$ и пересекает плоскости $P_1 : -X_1 + 2X_2 + X_3 = 1, X_1 + X_4 - 4 = 1$ и $P_2 : X_1 = 4 + t, X_2 = 4 + 2t, X_3 = 5 + 3t, X_4 = 4 + 4t$.

Четыре задачи по школьной геометрии из учебника А.Киселева

7. Середины сторон четырехугольника и середины его диагоналей являются вершинами центрально-симметричного шестиугольника. Доказать.

8. Точки E и K – середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Тогда прямые BE и KD делят диагональ AC на три равные части. Доказать.

9. Пусть D, E, F – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC . Проходящая через B прямая пересекает отрезок DE и прямую EF в точках M и N . Доказать, что $AN \parallel CM$.

10*. На сторонах треугольника ABC отмечены точки $C^* = 1/3A + 2/3B, A^* = 1/3B + 2/3C, B^* = 1/3C + 2/3A$. Найти отношение площади треугольника, образованного пересечением прямых AA^*, BB^*, CC^* , к площади исходного треугольника.