Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задачи с 3 занятия.

На третьем занятии было выдано первое индивидуальное задание, обсуждению которого будет посвящена заметная часть следующего занятия, поэтому приведенные ниже задачи предлагаются на две недели.

Линейный оператор $f : V \to V$ на некотором (не обязательно конечномерном!) векторном пространстве V над некоторым полем $\mathbb{K}$ называется *инволюцией*, если $f^2 = \mathrm{Id}_V$.

(1) Докажите, что если характеристика поля $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, то линейный оператор f является инволюцией тогда и только тогда, когда он является отражением относительно некоторого подпространства, т.е. когда существует такое разложение V в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$, так что любой вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, и тогда действие оператора состоит в том, что $f(v) = u - w$. (Отметим, что в конечномерном случае это означает, что в подходящем базисе матрица этого оператора имеет вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$.)

(2) Как описать линейные инволюции в случае, когда $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 2$? Можно ограничиться конечномерным случаем и $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.