

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Весна 2025.

Задания с 13 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии. Также остаются для обсуждения задачи 2 и 3 из прошлого задания (с 11 занятия).

В этом задании мы обсуждаем особые точки плоских кривых; если выбрать аффинные координаты (x, y) так, чтобы особенностью была точка $a = (0, 0)$, то кривая X задается уравнением $\sum_{k \geq 2} f_k(x, y) = 0$, где f_k — однородная форма степени k . Особая точка a называется *двойной* (или *квадратичной*), если форма f_2 ненулевая.

- (1) а) Вычислите пополнение локального кольца \hat{O}_a особой точки для полукубической параболы $(y^2 = x^3)$ и декартова листа $(y^2 = x^3 + x^2)$.
б) Докажите, что для полукубической параболы \hat{O}_a не имеет делителей нуля.
в) Найдите делители нуля в \hat{O}_a для декартова листа и укажите их геометрический смысл.
г) Докажите, что пополнение локального кольца особой точки $a = (0, 0)$ для декартова листа и кривой $xy = 0$ изоморфны.
- (2) Докажите, что пополнение локального кольца особой точки $(0, 0)$ плоской кривой, заданной в аффинных координатах уравнением $f(x, y) = 0$, изоморфно фактор-кольцу кольца формальных степенных рядов $\mathbf{k}[[x, y]]/(f)$.
- (3) Если пополнения локальных колец двух особых точек изоморфны, то такие особенности называются *формально эквивалентными*. С помощью предыдущей можно получить формальную классификацию основных типов двойных особых точек плоских кривых.
 - а) Докажите, что если форма f_2 есть произведение двух непропорциональных линейных форм, то все такие двойные особенности формально эквивалентны (например, особенности $xy = 0$). Такая особенность называется *двойной особой точкой с разделенными касательными*, или (калька с английского "node") *нодальной* особенностью.
 - б) Докажите, что если форма f_2 есть квадрат линейной формы, а форма f_3 не делится на y , то все такие двойные особенности формально эквивалентны (например, особенности $y^2 = x^3$). Такая особенность называется *острием*, или (калька с английского "cusp") *каспидальной* особенностью.
- (4) Покажите, что в множестве однородных форм $F(x_0 : x_1 : x_2)$ степени d , задающих особые плоские кривые (согласно задаче 2 прошлого задания, это замкнутое подмножество коразмерности 1 в пространстве всех форм степени d) уравнения кривых, имеющих только нодальные и каспидальные особенности, образуют открытое подмножество.