Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Весна 2025.

Задания с 14 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

На прошедшем занятии мы доказали два важных результата с помощью рассмотрения подходящих пучков плоских кривых (кубических). Во-первых, мы доказали, что точки перегиба неособой плоской кубики образуют систему Штейнера (см задачу 1). Во-вторых, мы доказали, что если две тройки прямых на плоскости (l_1, l_2, l_3 и m_1, m_2, m_3) пересекаются в 9 различных точках $A_{i,j} = l_i \cap m_j$ и кубическая кривая проходит через 8 из этих точек, то она проходит и через девятую точку. Этот факт поможет решить задачу 3.

(1) Системой Штейнера называется пара $(Z, \mathcal{L})$, где Z — конечное множество, а $\mathcal{L} \subset 2^Z$ такое семейство трехэлементных подмножеств Z, что $\forall\ L \in \mathcal{L}\ |L| = 3$ и $\forall\ A, B \in Z$ $(A \neq B)$, $\exists$ единственное $L \in \mathcal{L}$, такое что $A, B \in L$. [Трехэлементные множества из $\mathcal{L}$ естественно интерпретировать как "прямые", проходящие через точки Z. На занятии мы доказали, что множество точек перегиба неособой кубической кривой является системой Штейнера.] Геометрической реализацией системы Штейнера над полем $\mathbb{K}$ называется такое вложение множества Z в $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, при котором $\forall\ L \in \mathcal{L}$ трем точкам из L соответствуют три точки плоскости, лежащие на одной прямой.

- а) Докажите, что число точек в любой системе Штейнера при делении на 6 может давать остатки только 1 и 3.
- б) Докажите, что любая система Штейнера из 7 точек изоморфна $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Докажите, что геометрическая реализация этой системы возможна только в случае $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$.
- в) Докажите, что любая система Штейнера из 9 точек изоморфна $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Докажите, что геометрическая реализация этой системы возможна над любым алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ при $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.
- г) Докажите, что любые две геометрические реализации системы Штейнера из 9 точек на проективной плоскости проективно эквивалентны, т.е. переводятся друг в друга проективным преобразованием плоскости.

(2) Используя подходящие пучки кубических кривых, докажите две следующие классические теоремы проективной геометрии.

- а) **Теорема Паскаля.** Точки пересечения трех противоположных сторон шестиугольника, вписанного в конику (плоскую неособую кривую второго порядка), лежат на одной прямой.
- б) **Теорема Паппа.** На плоскости даны две различные прямые l и m, на прямой l даны три различные точки A, B C, а на прямой m даны три различные точки A', B' C'. Пусть M — точка пересечения прямых AB' и $A'B$, N — точка пересечения прямых AC' и $A'C$, а P — точка пересечения прямых BC' и $B'C$. Тогда M, N P лежат на одной прямой.

(3) Докажите ассоциативность операции сложения точек на неособой плоской кубической кривой. (Операция была определена на занятии.)