# Теория функций комплексного переменного – 2025
## листок 4

**1.** Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma (z-a)^n dz$ по контуру $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t < 2\pi$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

**2.** Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, а $\gamma$ – некоторый путь из $a$ в $b$. (Убедитесь, что при $n \neq -1$ интеграл не зависит от выбора пути, а при $n = -1$ зависит, и опишите как.)

**3.** Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$ по единичной окружности.

**4.** Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_\gamma \frac{2z^2 + 5z + 8}{z(z+1)^2}\,dz$, где контур $\gamma$ – окружность $|z| = 3$.

**5.** Найдите все возможные значения интеграла $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных выборах контура $C$ ($C$ – замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек $0, 1, -1$).

**6.** Покажите, что если путь $\gamma$, соединяющий точки 0 и 1, не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где $k$ – целое число.

**7.** Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1})dz$.

**8.** Приведите пример рациональной функции $f$ и замкнутого контура $\gamma$ таких, что $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz = 1$ и $\displaystyle\oint_\gamma zf(z)dz = -1$.

**9.** Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}dz$, где $\gamma$ – окружность радиуса $R$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, проходимая против часовой стрелки.

**10.** Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{\bar{z}}{z}\,dz$, где $\gamma$ – окружность радиуса $R$ с центром в точке $a$ ($|a| \neq R$).

**11.** Пусть $P(z)$ – многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R} P(z)d\bar{z} = -R^2 P'(a).$$

**12.** Пусть $\gamma$ – гладкий замкнутый контур, а функция $f$ голоморфна в окрестности кривой $\gamma$. Докажите, что $\oint\limits_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$ – чисто мнимое число.

**13.** Вычислите интегралы

(а) $\iint\limits_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2}\, dx\, dy$,

(б) $\iint\limits_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}}\, dx\, dy$.

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).