Семинар 4

Задача 1. [Инволюции.] На прошлом семинаре мы говорили, что любая линейная инволюция векторного пространства V является отражением от некоторого подпространства, т.е. существует такое разложение V в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$, так что любой вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, и тогда действие инволюции f состоит в том, что $f(v) = u - w$. Из этого получается описание всех проективных инволюций пространства $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$: существуют два непересекающихся проективных подпространства $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ (где $k + m = n - 1$), неподвижных относительно инволюции, а образ при инволюции любой точки $C =< v >$, $v \in V$, лежащей вне этих подпространств, получается исходя из того, что через C проходит единственная прямая, пересекающая подпространство $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}(U)$ в некоторой точке $A =< u >\in \mathbb{P}(U)$ и подпространство $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(W)$ в некоторой точке $B =< w >\in \mathbb{P}(W)$ (это те самые u и w, для которых $v = u + w$) и тогда C переходит при инволюции в четвертую гармоническую точку D на этой же прямой, т.е. такую, что $(ABCD) = -1$.

(1) Пусть даны $Q \subset \mathbb{P}^n$ — неособая квадрика, и точка $A \in \mathbb{P}^n$, $A \notin Q$. Тогда определена инволюция на квадрике Q, переводящая точку $B \in Q$ во вторую точку пересечения прямой AB с Q. Покажите, что эта инволюция квадрики является ограничением на Q проективной инволюции $\mathbb{P}^n$ описанного выше типа. Какими будут в этом случае неподвижные подпространства $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$?

(2) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — неособая квадрика. Покажите, что определенная в задаче 4 семинара 3 инволюция на множестве прямых в $\mathbb{P}^3$, сопоставляющая каждой прямой ее поляру относительно квадрики является инволюцией квадрики Плюккера $Gr \subset \mathbb{P}^5$ (напоминание про квадрику Плюккера см ниже), являющейся ограничением на Gr проективной инволюции $\mathbb{P}^5$ описанного выше типа. Какими будут в этом случае неподвижные подпространства $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$? [Заметьте, что, как было доказано на семинаре, прямые, лежащие на квадрике Q, неподвижны относительно этой инволюции, и потому соответствующие этим прямым точки Gr должны лежать в $\mathbb{P}(U)$ или в $\mathbb{P}(W)$.]

(3) Покажите, что геометрическим местом точек в $Gr \subset \mathbb{P}^5$, соответствующим прямым из двух семейств прямолинейных образующих на неособой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^3$, будут две кривые в $\mathbb{P}^5$. Что это за кривые? [Эту и предыдущую задачи нетрудно решить явным вычислением, задав квадрику Q простым уравнением, для которого мы уже знаем уравнения обоих семейств прямых, например, как в задаче 3 семинара 1.]

Задача 2. Рассмотрим проекцию Π_a неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$ из точки $a \notin Q$ на экран $\mathbb{P}^2$ (можем считать, что экраном является $P_a Q$). Покажите, что два семейства образующих на квадрике спроектируются в одно семейство прямых на экране, являющихся касательными к некоторой конике $C \subset \mathbb{P}^2$. Что это за коника?

Задача 3. [Пространственная теорема Брианшона] Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — неособая квадрика, l_1, l_2, l_3 — прямые из одного семейства образующих на Q, m_1, m_2, m_3 — прямые из второго. Обозначим: $l_1 \cap m_1 = A, l_1 \cap m_2 = B, l_2 \cap m_2 = C, l_2 \cap m_3 = D, l_3 \cap m_3 = E, l_3 \cap m_1 = F$. Докажите, что AD, BE и CF пересекаются в одной точке. С помощью результата предыдущей задачи получите отсюда новое доказательство классической теоремы Брианшона на плоскости.

Задача 4. [Задача про забор.] Пусть m_1, m_2, m_3, m_4 - скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, а прямая l пересекает их все ("столб забора"). Докажите, что в общем случае существует еще одна прямая, которая также пересекает все прямые m_1, m_2, m_3, m_4. Для доказательства воспользуйтесь результатом задачи 4 семинара 2 и рассмотрите квадрики Q_1 и Q_2, определенные, соответственно тройками прямых m_1, m_2, m_3 и m_2, m_3, m_4, и покажите, что $Q_1 \cap Q_2$ — это четыре прямые, образующие пространственный четырехугольник.

Напоминание про квадрику Плюккера.

Пусть V — четырехмерное векторное пространство с базисом e_0, e_1, e_2, e_3, рассмотрим внешний квадрат $\Lambda^2 V$ пространства V. Напомним, что по определению это пространство грассмановых многочленов второй степени от e_0, e_1, e_2, e_3, т.е. шестимерное векторное пространство, базисом которого являются $e_0 \wedge e_1$, $e_0 \wedge e_2$, $e_0 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$. Элементы $\Lambda^2 V$ мы будем называть бивекторами.

Рассмотрим $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$ и $a, b \in \mathbb{P}^3$, $a =< u >, b =< v >$ $(u, v \in V)$. Прямой $l = (ab)$, лежащей в $\mathbb{P}^3$, мы можем сопоставить бивектор $u \wedge v \in \Lambda^2 V$ с точностью до умножения на ненулевой коэффициент (выбор вместо a и b двух других точек на прямой даст тот же бивектор с точностью до ненулевого коэффициента). Тем самым задано отображение, сопоставляющее прямым в $\mathbb{P}^3$ точки в $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Это отображение инъективно, но не сюръективно: бивектор $\xi = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ не всегда представим как произведение некоторых u и v. Оказывается, что такие u и v, что $\xi = u \wedge v$, существуют тогда и только тогда, когда $\xi \wedge \xi = 0$. Последнее равносильно условию

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0,$$

которое задает квадрику в $\mathbb{P}^5$ (с координатами $(p_{01} : p_{02} : ... : p_{23})$). Эта квадрика называется **квадрикой Плюккера**, мы будем обозначать ее как Gr (или $Gr(2,4)$ — многообразие Грассмана двумерных подпространств в четырехмерном).