Механика 2025

Домашнее задание № 3

Срок сдачи задания: до конца дня **01.03.24**

---

1. Компоненты силы $\vec{F}$ заданы в сферических координатах r, θ и ϕ на $\mathbb{R}^3$:

$$F_r = -2r\cos\phi\sin 2\theta, \quad F_\theta = -2r\cos\phi(1+\alpha\sin^2\theta), \quad F_\phi = -\alpha r\cos\theta\sin\phi,$$

где α — вещественный параметр. Определите, при каких значениях α сила потенциальна, и найдите соответствующую функцию потенциальной энергии.

2. Компоненты силы $\vec{F}$ заданы в цилиндрических координатах ρ, ϕ и z на $\mathbb{R}^3$:

$$F_\rho = \rho X(z)\cos\phi, \quad F_\phi = \rho Y(\phi)e^{-z^2}, \quad F_z = V(\rho,\phi)\, z\, e^{-z^2},$$

где X, Y и V — произвольные гладкие функции.

а) При каких X, Y и V выполнены необходимые условия потенциальности $\vec{F}$? Найдите общее решение.

б) Определите вид потенциальной силы $\vec{F}$, если дополнительно заданы граничные условия:

$$\vec{F}\Big|_{\rho=0} = 0 \quad (\text{на оси } O\vec{z}), \qquad F_\rho\Big|_{\phi=z=0} = \rho \quad (\text{на оси } O\vec{x}).$$

Постройте соответствующую функцию потенциальной энергии и проверьте достаточные условия потенциальности.

3. В цилиндрических координатах пространства $\mathbb{R}^3$ компонента F_ϕ *потенциальной* силы $\vec{F}$ имеет вид:

$$F_\phi = f(\rho, z)\cos\phi,$$

где $f(\rho, z)$ — гладкая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент силы $\vec{F}$ и вычислите соответствующий потенциал.

4. Тангенциальное силовое поле в сферических координатах на $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$\vec{F} = F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_\phi\,\vec{e}_\phi.$$

Иными словами, в любой точке $\mathbb{R}^3$ вектор силы $\vec{F}$ ортогонален радиус-вектору $\vec{r}$.

а) Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид тангенциальной потенциальной силы.

б) Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое в точках экватора сферы радиуса r (т.е. при $\theta = \pi/2$) имеет ненулевую компоненту $F_\phi(r)$, не зависящую от угла ϕ?

5. Массивная частица движется без трения по поверхности кругового конуса (см. рис.1)

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

К частице прикреплена невесомая пружина, коэффициент упругости которой равен κ. Второй конец которой свободно скользит по оси $O\vec{z}$, причем пружина остается перпендикулярной к оси $O\vec{z}$ при любых движениях частицы. Потенциальная энергия упругой деформации пружины дается формулой $U = \kappa\ell^2/2$, где ℓ — длина пружины. Силы тяжести в системе не действуют.

а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой системы.

б) Выпишите уравнения движения частицы — уравнения Эйлера-Лагранжа.

в) Есть ли в системе сохраняющиеся величины – интегралы движения? Если есть, приведите их явный вид в выбранных обобщенных координатах.

6. В изображенной на рисунке 2 системе грузиков и блоков нить абсолютно гибкая, невесомая и нерастяжимая, скользит по поверхности блоков без трения; блоки невесомы; пружина абсолютно упругая с коэффициентом упругости κ; грузики имеют массы m и M, и на них также действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз.

а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан системы.

б) Выпишите уравнения уравнения Эйлера-Лагранжа.

в) Определите частоту гармонических колебаний грузика m.

Рис. 1

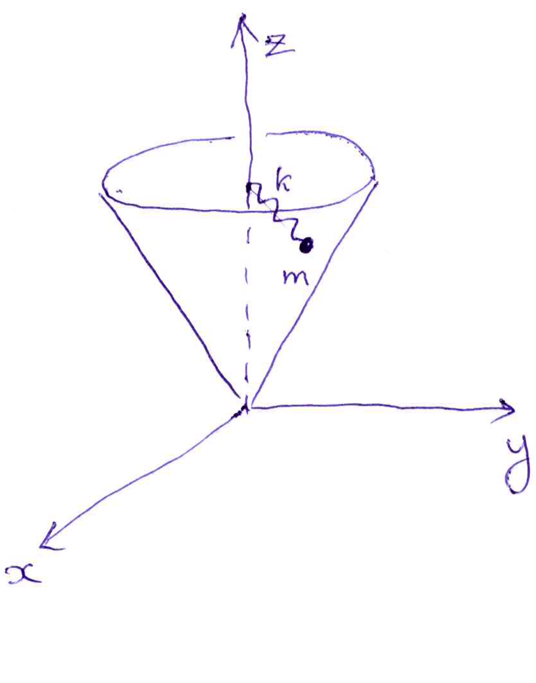

Рис. 2