Семинар 5.

Напомним некоторые обозначения и понятия. Пусть F - ненулевая форма степени d от переменных $x_0, x_1, ..., x_n$, а $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ - гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n$, определяемая формой F. Пусть $a = (a_0 : ... : a_n)$ и $b = (b_0 : ... : b_n)$ - точки в $\mathbb{P}^n$, $D_a : \ \mathbf{k}[x_0, ..., x_n] \to \mathbf{k}[x_0, ..., x_n], \ F \mapsto D_aF(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$ - *оператор поляризации*, и $D_a^k := \underbrace{D_a \circ ... \circ D_a}_{k}$ - k-кратная композиция оператора D_a с самим собой. Гиперповерхность $P_a(X) = P_a^1(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_aF)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *(первой) полярой точки a относительно гиперповерхности X*, а гиперповерхность $P_a^k(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_a^kF)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *k-ой полярой точки a относительно гиперповерхности X*, $k \geqslant 1$.

Задача 1. 1) Проверьте, что

$$D_a^k(x) = \sum_{k_0+...+k_n=k}^{n} \frac{\partial^k F(x)}{\partial^{k_0} x_1 ... \partial^{k_n} x_n} a_0^{k_0} ... a_n^{k_n}.$$

1) Проверьте, что $D_aD_b = D_bD_a$.

Задача 2. Докажите, что оператор поляризации D_a не зависит от выбора координат $x_0, ..., x_n$.

Задача 3. Пусть $a = (a_1, ..., a_n), \ b = (b_1, ..., b_n)$ - векторы в $\mathbf{k}^n$. Для любых $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ рассмотрим вектор $\lambda a + \mu b = (\lambda a_1 + \mu b_1, ..., \lambda a_n + \mu b_n)$. Под $F(\lambda a + \mu b)$ будем понимать выражение $F(\lambda a_1 + \mu b_1, ..., \lambda a_n + \mu b_n)$. Обозначим через $\varphi(\lambda)$ выражение $F(\lambda a + \mu b)$, если в нем фиксированы a, b и μ. Рассмотрим формулу Тейлора $\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \lambda\varphi'(0) + \frac{\lambda^2}{2!}\varphi''(0) + ... + \frac{\lambda^d}{d!}\varphi^{(d)}(0)$.
1) Проверьте, что k-ый член формулы Тейлора (начиная от $k = 0$) равен

$$\frac{1}{k!}\lambda^k \mu^{d-k} D_a^k(b), \qquad \text{откуда} \qquad \varphi^{(k)}(0) = \mu^{d-k}(D_a^kF)(b).$$

2) Выведите отсюда, что

$$\frac{(D_a^kF)(b)}{k!} = \frac{(D_b^{d-k}F)(a)}{(d-k)!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant d.$$

3) Проверьте, что

$$\frac{(D_a^dF)(b)}{d!} = F(a).$$

4) Докажите, что если $b \in P_a^k(X)$, то $a \in P_b^{d-k}(X)$, и обратно.

Задача 4. Докажите, что для любых точек $a, b \in \mathbb{P}^n$ верны следующие утверждения.
1) $P_b^m(P_a^k(X)) = P_a^k(P_b^m(X))$.
2) $P_a^m(P_a^k(X)) = P_a^{k+m}(X)$.
3) $a \in P_a^k(X)$ для любой точки $a \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.

Задача 5. Как было понято на семинаре 5, касательное пространство $\mathbb{T}_bX$ к гиперповерхности X в произвольной точке $b \in X$ определяется формулой $\mathbb{T}_bX = \{x \in X \mid (D_xF)(b) = 0\}$.
1) Докажите, что касательное пространство $\mathbb{T}_bX$ совпадает с $(d-1)$-ой (т.е. последней) полярой $P_b^{d-1}(X)$:

$$\mathbb{T}_bX = P_b^{d-1}(X).$$

2) Докажите, что $\mathbb{T}_bP_b^k(X) = \mathbb{T}_bX$ для любой точки $b \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.