Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Весна 2025.

Задания с 15 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) а) Для доказательства того, что уравнение любой неособой плоской кубики $X = V(F)$ (F — кубическая форма) в подходящей системе координат имеет форму Вейерштрасса, мы сначала доказали, что на любой кривой степени выше 2 есть точка перегиба (т.е. точка $a \in X$, через которую проходит прямая l, пересекающая нашу кривую с кратностью как минимум 3), а потом выбрали систему координат $(x_0 : x_1 : x_2)$, в которой эта точка имеет координаты $a = (0 : 0 : 1)$, а прямая l — уравнение $x_0 = 0$. Тогда ограничение формы F на l в этой системе координат должно иметь трехкратный корень в точке a, поэтому с точностью до коэффициента это x_1^3, так что $F = x_1^3 + x_0 q(x_0 : x_1 : x_2)$, где q — квадратичная форма. Покажите (мы пропустили этот шаг), что если в квадратичной форме q коэффициент при x_2^2 нулевой, то кривая X особая.

б) Покажите, что кубика, заданная в Вейерштрассовой форме (в аффинных координатах) уравнением $y^2 = P_3(x)$, неособа (во всей проективной плоскости) тогда и только тогда, когда кубический многочлен $P_3(x)$ не имеет кратных корней.

в) Покажите, что неособая кубика, заданная в Вейерштрассовой форме (в аффинных координатах) уравнением $y^2 = P_3(x)$, имеет в аффинной плоскости ровно 8 точек перегиба (что вместе с начальной точкой $(0 : 0 : 1)$ дает ожидаемое число 9).

г) Найдите 9 точек перегиба кубики Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ и уравнения 12 прямых, на которых лежат тройки этих точек (это система Штейнера!).

д) Какие кубики являются особыми в пучке Гессе $\lambda(x_0^3+x_1^3+x_2^3)+\mu x_0 x_1 x_2 = 0$, и что это за кубики? [Ответ можно угадать на основании ответа к предыдущей задаче.]

(2) На занятии мы определили оператор поляризации $D_a = \sum_0^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($a_i \in \mathbb{K}$ — некоторые константы), действующий на однородные формы от переменных $x_0, \ldots, x_n$. Если $F(x_0 : \ldots : x_n)$ — однородная форма степени d, $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, то ее k-ой полярой относительно точки $a = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ называется гиперповерхность $P_{a^k} X = V(D_a^k F) \subset \mathbb{P}^n$ (она имеет степень

$d-k$ или совпадает со всем $\mathbb{P}^n$, если форма $D_a^k F$ нулевая). Мотивация такого определения состоит в том, что геометрическое место точек касания всевозможных касательных прямых к X, проведенных из точки $a \in \mathbb{P}^n$, есть в точности $X \cap P_a X$ (для первой поляры пишут $P_a X$ вместо $P_{a^1} X$), что является прямым обобщением аналогичного факта для случая $d = 2$.

Из рассмотрения разложения Тейлора $F(\lambda a + \mu b)$ по степеням λ и μ мы вывели, что

$$\frac{D_a^k F(b)}{k!} = \frac{D_b^k F(a)}{(d-k)!},$$

и поэтому

$$b \in P_{a^k} X \quad \Leftrightarrow \quad a \in P_{b^{d-k}} X.$$

а) Покажите, что если $a \in X$, то $P_{a^{d-1}} X$ это в точности касательная гиперплоскость $\mathbb{T}_a X$ к гиперповерхности X в точке a.

б) Покажите, что если $a \in X$ — неособая точка на X, то все поляры $P_{a^k} X$ проходят через точку a, причем на них она также неособа, и $\mathbb{T}_a P_{a^k} X = \mathbb{T}_a X$.

в) Пусть a — неособая точка кубической гиперповерхности X, тогда $P_a X$ это некоторая квадрика, неособая в точке a, а $P_{a^2} X = \mathbb{T}_a X$. Пусть прямая l, проходящая через точку a, пресекает кубику еще в двух различных точках b и c, а полярную квадрику $P_a X$ — в точке d. Докажите, что это гармоническая четверка точек, т.е. $(adbc) = -1$. [Эту задачу легко свести к одномерной, показав, что операции взятия поляры и ограничения на подпространство перестановочны.]

(3) Пусть X — неособая точка кубическая кривая, мы ввели на X структуру абелевой группы. Опишите ее подгруппу 2-кручения и подгруппу 3-кручения. [В качестве нуля абелевой группы часто удобно выбрать точку перегиба кривой X.]