

Семинар 20

Аффинные преобразования 1

0. Рассмотрим биективное аффинное отображение $\text{Aff}V$ в $\text{Aff}V$. Доказать, что обратное отображение также аффинно.

1. Доказать, что аффинное отображение переводит:

а) плоскость в плоскость (не обязательно той же размерности!);

б) параллельные плоскости в параллельные.

2. Найти дифференциал и вектор параллельного переноса аффинного преобразования, переводящего точки $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ в точки $(1, 3)$, $(-2, 1)$, $(0, 0)$ соответственно.

3. Найти аффинное преобразование, при котором все точки прямой $2X + 3Y - 5 = 0$ неподвижны, а точка $(0, 1)$ переходит в точку $(2, -1)$.

4. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$U = 3X + 4Y + 6, V = 4X + 3Y - 1.$$

5. Инвариантная плоскость аффинного преобразования с единственной неподвижной точкой проходит через эту точку. Доказать.

6. Найти аффинное преобразование, переводящее координатные плоскости в плоскости $X - Y + Z - 1 = 0$, $X + Y + 1 = 0$, $2X - Z + 1 = 0$ соответственно, а точку $(1, 1, 1)$ в точку $(1, 1, 0)$.

7. Привести пример аффинного преобразования трехмерного пространства без неподвижных точек и инвариантных прямых, но с инвариантной плоскостью.

8. Доказать, что гомотетия τ с центром S и коэффициентом k записывается формулой $\tau(A) = kA + (1 - k)S$.

9. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

10*. Даны две тройки прямых. В каждой тройке прямые попарно скрещиваются и не параллельны одной плоскости. Доказать, что существует аффинное преобразование, переводящее первую тройку во вторую. Верно ли это утверждение, если прямые в каждой тройке попарно скрещиваются, но параллельны одной плоскости?