

### Задачи для подготовки к контрольной № 3

В этой контрольной подстановка/перестановка будет записываться только своим вторым рядом

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n-1), \sigma(n)).$$

Цикл  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$  обозначается как  $|i_1, i_2, \dots, i_k\rangle$ .

**ПКЗ♦1.** Найдите порядок и чётность перестановки

- а)  $(1, 12, 8, 11, 10, 5, 4, 9, 2, 6, 7, 3) \in S_{12}$
- б)  $(2, 1, 9, 8, 10, 4, 7, 5, 3, 6) \in S_{10}$
- в)  $(4, 3, 7, 2, 6, 13, 10, 11, 5, 1, 8, 12, 9) \in S_{13}$ .

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы:  $|2, 12, 3, 8, 9\rangle|4, 11, 7\rangle|5, 10, 6\rangle$ , чётная перестановка порядка 15.  
 в (б) разложение на циклы:  $|1, 2\rangle|3, 9\rangle|4, 8, 5, 10, 6\rangle$ , чётная перестановка порядка 10  
 в (в) разложение на циклы:  $|1, 4, 2, 3, 7, 10\rangle|5, 6, 13, 9\rangle|8, 11\rangle$ , нечётная перестановка порядка 12.

**ПКЗ♦2.** Сколько перестановок

- а) не меняется при сопряжении перестановкой  $(5, 6, 9, 2, 7, 4, 1, 3, 8)$  в  $S_9$
- б) сопряжено перестановке  $(1, 8, 3, 6, 7, 4, 5, 2)$  в  $S_8$
- в) коммутирует с перестановкой  $(2, 8, 10, 6, 4, 1, 5, 7, 11, 3, 9)$  в  $S_{11}$
- г) не меняется при сопряжении перестановкой  $(9, 4, 3, 2, 8, 7, 6, 5, 1, 10)$  в  $A_{10}$
- д) сопряжено перестановке  $(11, 3, 6, 7, 9, 2, 5, 4, 1, 10, 8)$  в  $A_{11}$  ?

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы:  $|1, 5, 7\rangle|2, 6, 4\rangle|3, 9, 8\rangle$ , ответ: 162  
 в (б) разложение на циклы:  $|2, 8\rangle|4, 6\rangle|5, 7\rangle$ , ответ: 420  
 в (в) разложение на циклы:  $|1, 2, 8, 7, 5, 4, 6\rangle|3, 10\rangle|9, 11\rangle$ , ответ 56  
 в (г) разложение на циклы:  $|1, 9\rangle|2, 4\rangle|5, 8\rangle|6, 7\rangle$ , класс сопряжённости в  $A_{10}$  не расширяется, ответ: 384  
 в (д) разложение на циклы:  $|1, 11, 8, 4, 7, 5, 9\rangle|2, 3, 6\rangle$ , класс сопряжённости в  $A_{11}$  расширяется, ответ: 950400.

**ПКЗ♦3.** Сколько в  $S_9$  перестановок порядка а) 3 б) 12 в) 14?

ОТВЕТ: в (а) типа [3, 3]: 2240, типа [3, 1, 1, 1, 1, 1]: 3360, типа [3, 1, 1, 1, 1, 1]: 168, итого: 5768  
 в (б) типа [4, 3, 1, 1]: 15120, итого: 30240  
 в (в) типа [7, 2]: 25920, итого: 25920.

**ПКЗ♦4.** Что за подгруппу порождают в  $S_5$  перестановки  $(3, 1, 4, 2, 5)$  и  $(3, 2, 4, 1, 5)$ ? Сколько в ней элементов? Какой из связанных с правильными многоугольниками или правильными многогранниками групп она изоморфна?

ОТВЕТ: Собственная группа тетраэдра  $A_4$  с вершинами  $(2, 3, 4, 1)$ , заданная поворотами на  $180^\circ$  и  $120^\circ$  градусов.

**ПКЗ♦5.** Что за подгруппу порождают в  $S_5$  перестановки  $(2, 1, 5, 4, 3)$  и  $(5, 1, 2, 4, 3)$ ? Сколько в ней элементов? Какой из связанных с правильными многоугольниками или правильными многогранниками групп она изоморфна?

ОТВЕТ: Группа диэдра  $D_4$ , заданная отражением относительно перпендикуляр к стороне и поворотом.

**ПКЗ♦6.** Какие из ниже перечисленных групп изоморфны:

- а)  $S_n$  б)  $A_n$  в)  $D_n$  г) Группы движений правильных многогранников д) Группы собственных движений правильных многогранников е) Группы движений правильных  $n$ -мерных симплексов.

**ПКЗ♦7.** Сколько различных ожерелий из шести бусин можно собрать, если у Вас есть только одинаковые по форме 6 белых, 6 черных и 6 красных бусин?

ОТВЕТ:  $|X/D| \sum_{d \in D} \frac{1}{d} = (3^6 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) / 12 = 92$

**ПКЗ♦8.** Сколько различных ожерелий из пяти бусин можно собрать, если у Вас есть только одинаковые по форме 4 белые и 3 черные бусины?

**ПКЗ♦9.** Если у Вас есть только одинаковые по форме 2 белые, 3 черные и 4 красные бусины

- a) Сколько можно из них собрать различных направленных цепочек из шести бусин?
- б) Сколько можно из них сделать различных ожерелий из шести бусин?

$$\text{ОТВЕТ: } |X/G| = \sum_{g \in G} \frac{|G|}{|I|} = |G|/|X|$$