Механика 2025

Домашнее задание № 4

Срок сдачи задания: до конца дня **10.03.2025**

---

1. Клин массы M с углом при основании α может двигаться вдоль оси $O\vec{x}$. На вершине клина закреплен невесомый блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить с массами m_1 и m_2 на концах (см. рисунок 1). Тело m_1 перемещается по наклонной поверхности клина, тело m_2 — вдоль его вертикальной грани. Трение в системе отсутствует, однородная сила тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$ направлена вертикально вниз.

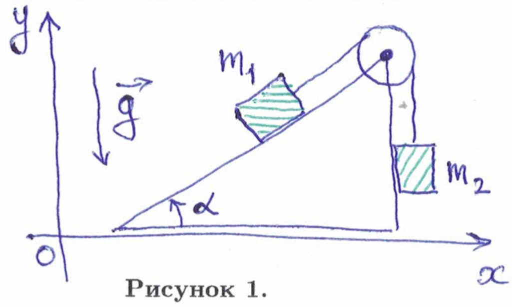

Рисунок 1.

а) Выберите подходящие обобщенные координаты и составьте лагранжиан системы. Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

б) Определите имеющиеся законы сохранения и приведите явные выражения для сохраняющихся величин.

2. Две частицы одинаковой массы m связаны невесомой, нерастяжимой нитью. Нить пропущена через точечное отверстие в горизонтальной плоскости. Частица 1 движется в плоскости, частица 2 висит на нити под плоскостью и может двигаться только по вертикали (не раскачивается). Нить натянута. Трение отсутствует. В системе действует однородная сила тяжести, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз (см. рисунок 2).

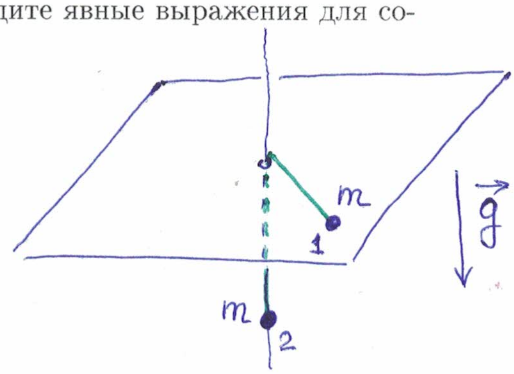

Рисунок 2.

а) Выберите подходящие обобщенные координаты и составьте лагранжиан системы.

б) Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа и найдите стационарные для частицы 2 решения (то есть решения, в которых частица 2 покоится).

в) Воспользовавшись законом сохранения энергии, перейдите к эффективной одномерной системе и постройте ее фазовый портрет.

3. Механическая система "качели-карусели" состоит из двух жестких, невесомых, нерастяжимых стержней длины R и ℓ. Стержень R закреплен одним концом в начале координат O и может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси $O\vec{z}$. Стержень ℓ одним своим концом шарнирно закреплен на свободном конце стержня R и может вращаться в вертикальной плоскости, проходящей через ось $O\vec{z}$ и стержень R. На втором конце стержня ℓ закреплена частица массы m. Трение отсутствует. На систему действует однородная сила тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$ направленным против оси $O\vec{z}$ (см. рис. 3).

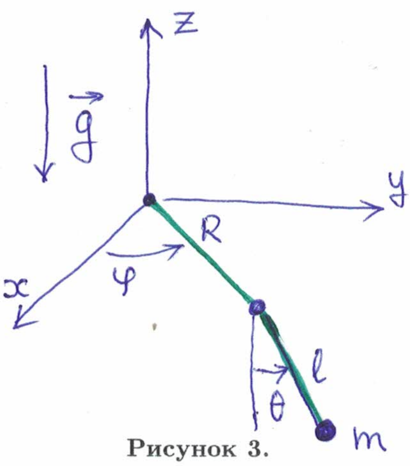

Рисунок 3.

а) Составьте лагранжиан системы, используя в качестве обобщенных координат указанные на рисунке 3 углы $\phi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [-\pi, \pi)$.

б) Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа и определите устойчивые стационарные по θ решения (то есть решения, для которых $\theta(t) = \theta_0 = \text{const}$). Сколько имеется таких решений в случае $R \geq \ell$ и в случае $R < \ell$?

в) Выпишите законы сохранения и, перейдя к эффективной одномерной системе, нарисуйте ее фазовый портрет для случая $R > \ell$.

4. Однородная тонкостенная цилиндрическая труба массы M и радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Внутри этой трубы находится *сплошной* однородный цилиндр массы m и радиуса $r < R$. Цилиндр m может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности трубы M, не отрываясь от нее в процессе движения. На систему действует однородная сила тяжести, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено по вертикали вниз (см. рисунок 4).

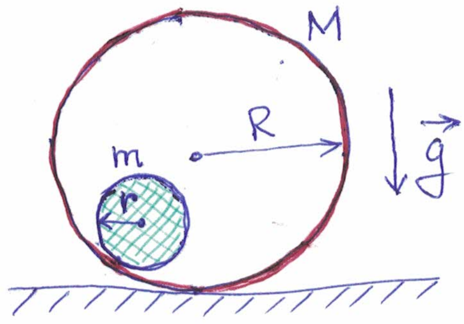

Рисунок 4.

а) Определите число степеней свободы и составьте лагранжиан системы, выбрав удобные обобщенные координаты.

Указание. Для подсчета кинетической энергии системы примените теорему о том, что кинетическая энергия неточечного тела равна сумме кинетической энергии его центра масс и энергии вращения вокруг него. Используйте эту теорему отдельно для трубы M и для цилиндра m.

б) Приведите выражения для всех имеющихся интегралов движения (законов сохранения).

в) Рассмотрим траектории движения системы, на которых и труба, и цилиндр в какой-то момент времени t_0 останавливаются. Назовем такое состояние системы точкой возврата. Найдите частоту малых колебаний цилиндра на траекториях, содержащих точки возврата и расположенных вблизи положения устойчивого равновесия.