

В этом разделе мы кратко изложим конструкцию инвариантов узлов/зацеплений, использующую R-матричные представления группы кос. Для этого нам потребуются результаты о связи узлов/зацеплений и кос.

Def Узел (зацепление) — это класс изотопий замкнутой кривой (нескольких замкнутых кривых) в \mathbb{R}^3 без само- и взаимных пересечений.

Def Регулярная проекция узла/зацепления — это такая его проекция в \mathbb{R}^2 , в которой нет наложения более 2-х кривых в одной точке, и при наложениях указывается кто над кем проходит (относительно плоскости проекции).

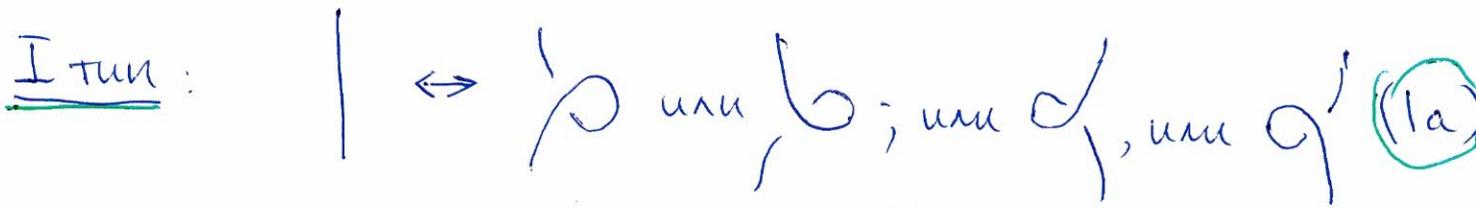
● Узел/зацепление однозначно задаётся
|| любой своей регулярной проекцией.

● Регулярные проекции одного узла/зацепления связаны между собой конечной последовательностью движений Рейдмейстера.

Движения Рейдемейстера (1927₂)

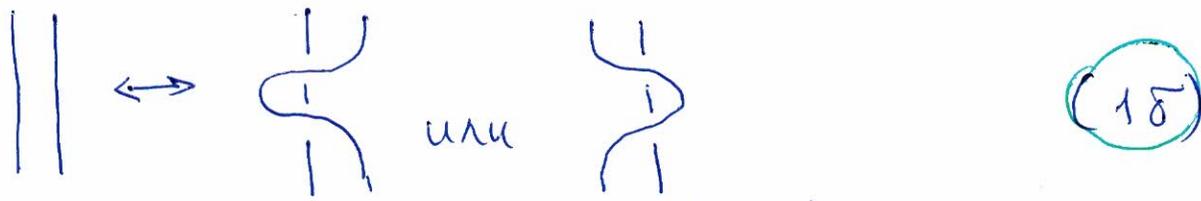
(2)

/ Kurt Reidemeister (1893-1971), Германия - узелник Эриха Гекке /



(аналог процедура Tr, см. ниже)

II тип:



(аналог соотн. $v_i v_i^{-1} = v_i^{-1} v_i = 1$)

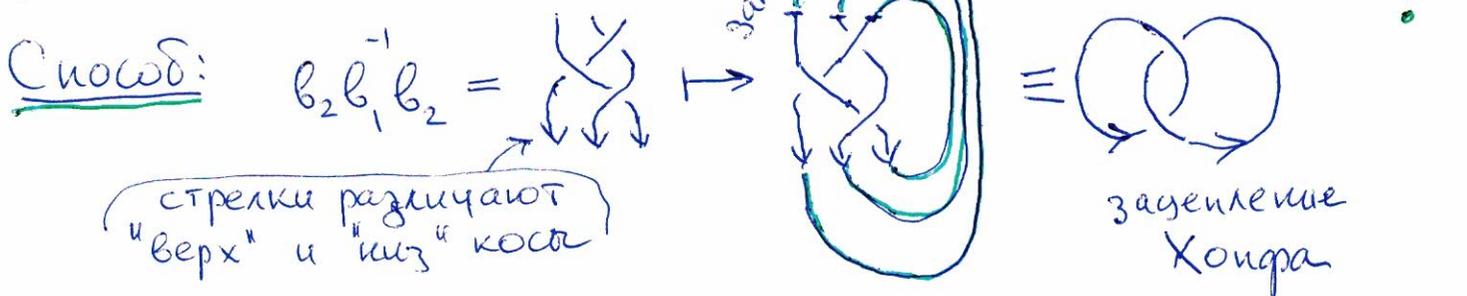
III тип:



(аналог соотношения кос)

Def Ориентация узла/зацепления задается указанием направлений движения вдоль всех его кривых (т.е., указанием стрелок).

Всякой косе сопоставляется ориентированное зацепление/узел.



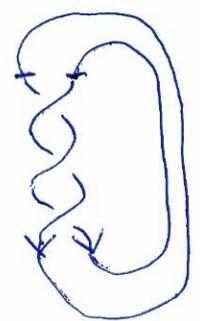
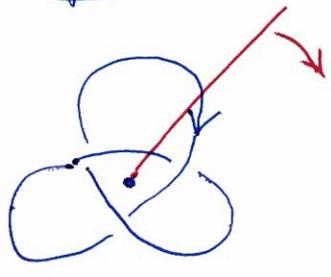
Обратное сооставление описывается в теореме Александера (1928)

/ James Waddell Alexander II (1888-1971), США — один из первых сотрудников IAS, Princeton, один из основателей алгебраической топологии/

Теорема Всякому ориентированному замкнутому /узлу можно сооставить замощение некоторой кисти (вообще говоря, не единственным образом).

Мы не будем детально доказывать, а только иллюстрируем дек-во примерами.

Пример 1 Трилистник



- замощение $v_1^3 \in B_2$

Описание процедуры: отмечаем точку на плоскости, вогнушкой из нее муз. Ок пересекает узел в 2-х точках. Начикаем вращать муз, скажем, по часовой стрелке, и следим, какие перекрестья нитей узла ок проходит при вращении. Совершив полный оборот, получаем картинку замощения узла. Фактически муз разрезает узел, превращая его в косу. Поворот

муга "считывает" представление косы в виде произведения артиковых генераторов.

(4)

В примере нам повезло, что пересекающие муги ориентированы в одном направлении и это их число не изменится при повороте муга.

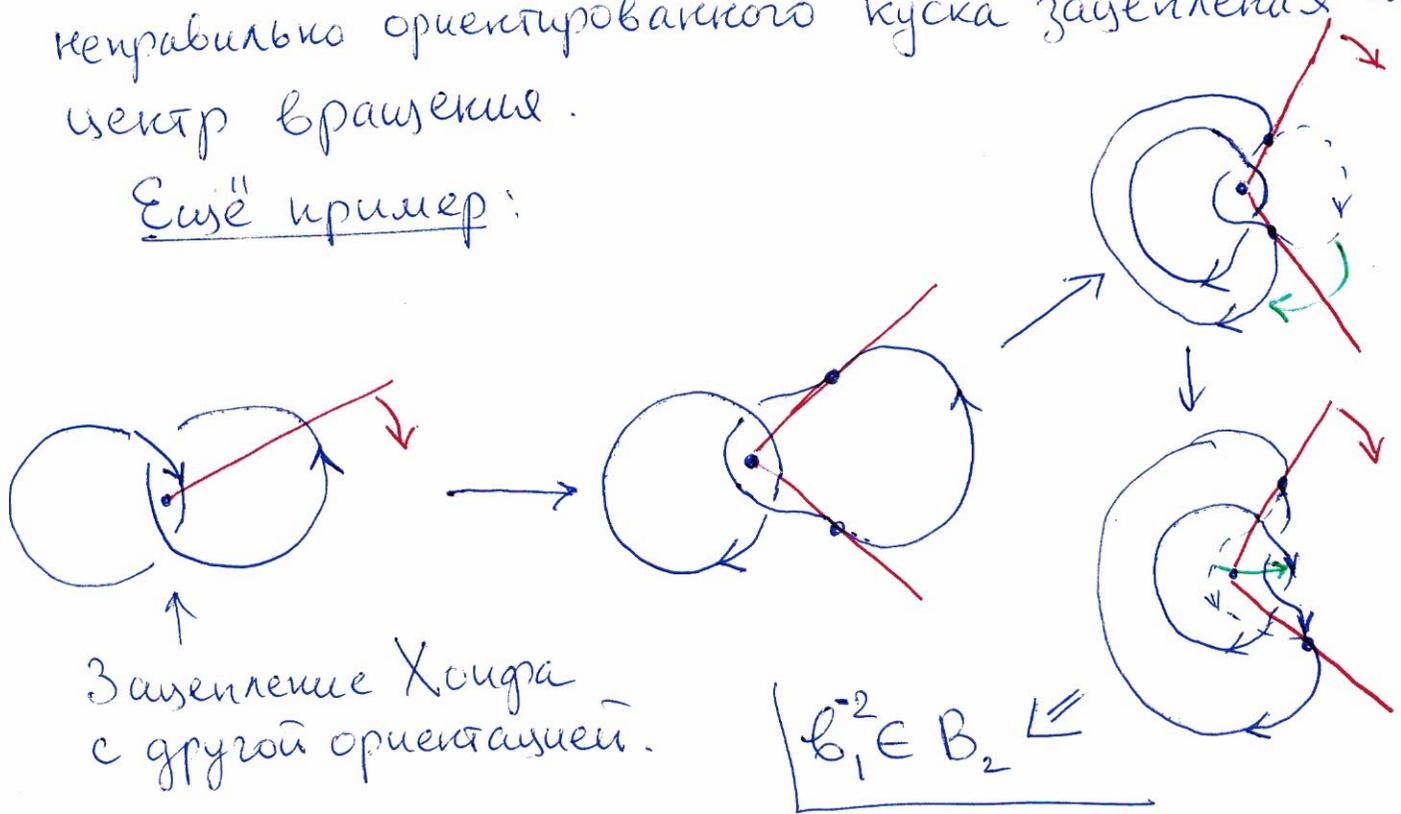
Покажем, что это верно связано с выбором точки начала муга и проекции зацепления/узла.

Простейший проблемный случай:



Проблема решается перекидыванием "похожего", т.е. неправильно ориентированного куска зацепления, через центр вращения.

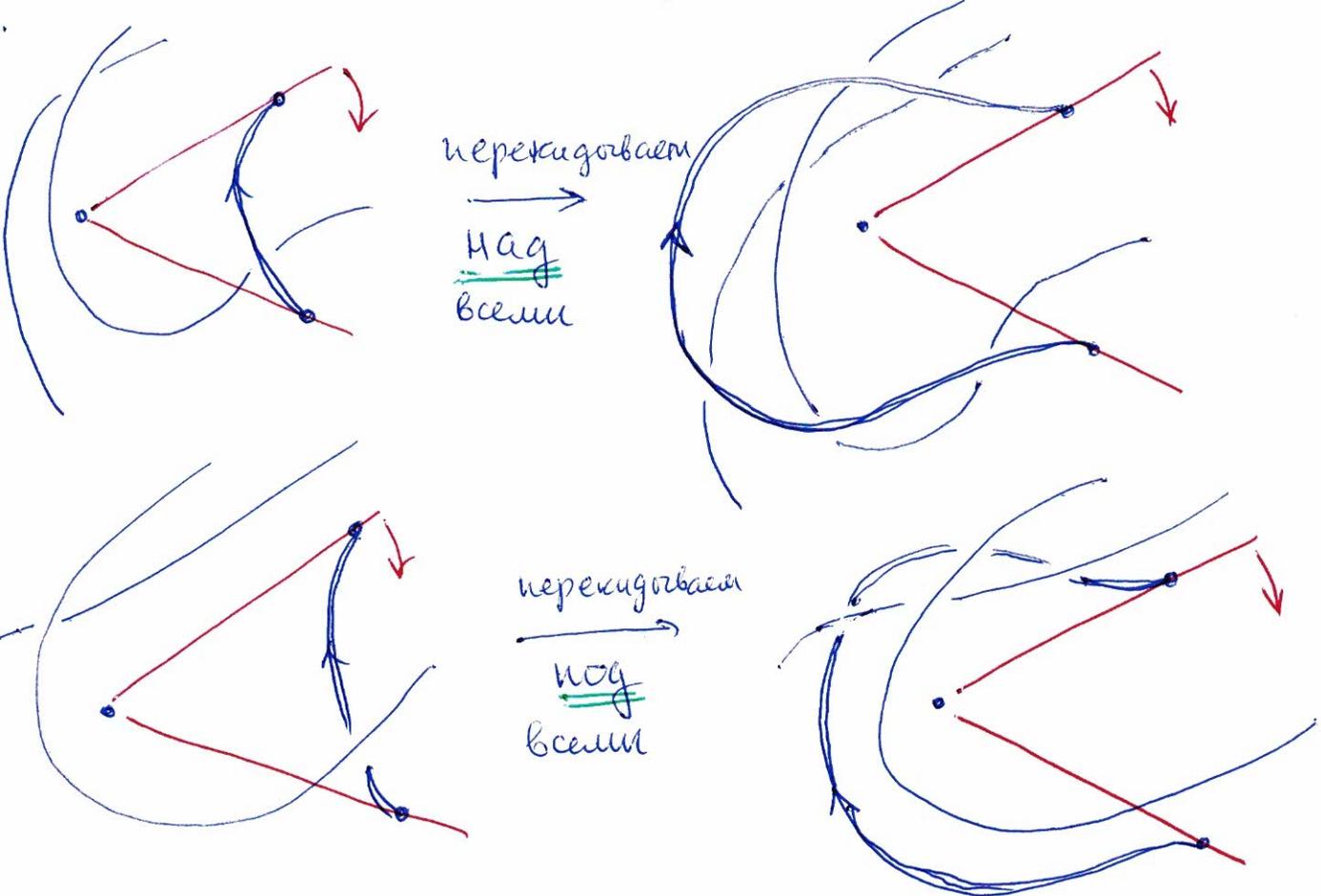
Ещё пример:



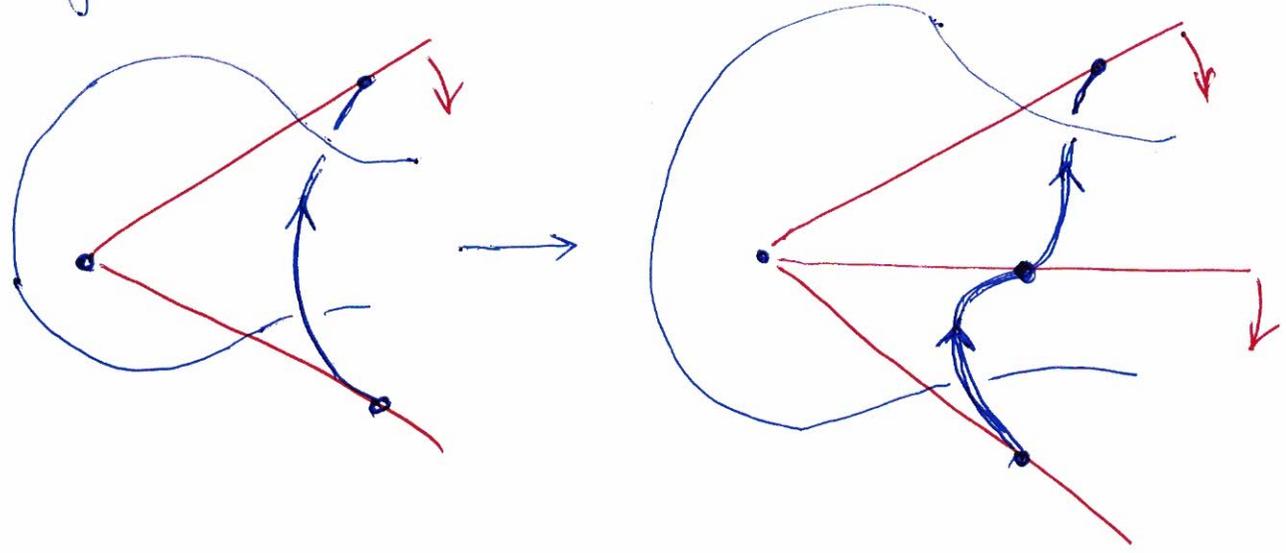
Зацепление Хойда с другой ориентацией.

$$B_1^2 \in B_2 \Leftarrow$$

Из второго примера (последнее перекидывание) видно, что при перекидывании неправильно ориентированного участка кити надо учитывать не расположение ("кад" или "ног") относительно других пересекающихся с ним нитей. Правила перекидывания:



Более сложные случаи разбиваются на элементарные куски



Таких образом за конкретное число перекидыва- ⑥
ний можно исправить все неправильно ориентирован-
ные участки. Если же все участки зацепления/узла
одинаково ориентированы относительно мура, то число
пересечений мура при его повороте будет неизменным 

Реш Представленный метод — подобие предложенного Алек-
сандером способа восстановления замкнутых по ориентиро-
ванному зацеплению/узлу. Он кажется, но не подда-
ётся хорошей алгоритмизации. Хороший алгоритм
восстановления косы по зацеплению был предложен
в 1990 г. Пьером Вохелем (Pierre Vogel) / см. Прасо-
лов - Сошкин "Узлы, зацепления, косы и 3-мерные многообра-
зия", МСНМО 1997, § 6.6, стр 84. /

 Сооставление замкнутой косы ориенти-
рованному зацеплению/узлу неоднозначно

Семейство кос, чьё замыкание даёт один и
тот же узел, описывается теоремой Маркова
/ Андрей Андреевич Марков - младший (1903 - 1979) СССР.
Сын А.А. Маркова - старшего, по имени которого идут Марков-
ские процессы /.

Теорема была сформулирована в 1936 г. Полное
доказательство теоремы дано Joan Birman в 1974 г. / см.
Кассель, Тураев, "Группы кос" т. 2 § 2.5 /

Теорема

Две косы, замыкание которых даёт один и тот же ориентированный узел/зацепление, связаны конечной последовательностью преобразований 2-х типов (преобразования Маркова):

I тип Сопрежение в V_n

$$x \leftrightarrow a x a^{-1} \quad \forall a, x \in V_n \quad (2a)$$

II тип Связь кос V_n и V_{n+1}

$$\forall x \in V_n \quad x \leftrightarrow x v_n^\varepsilon \in V_{n+1}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1 \quad (2b)$$

Предъявим теперь процедуру построения инвариантов зацеплений/узлов по R -матричному представлению $M_n(q)$. Процедура была предложена Владимиром Тураевым в 1988г.

Пусть R - строго косообратная геккевская R -матрица.

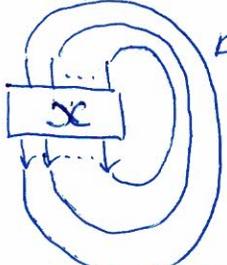
Всякой косе сопоставим ее R -матричное представление, порожденное R -матрицей $x R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$. Здесь x - масштабный параметр, который зафиксируем позже. В частности:

$$\begin{matrix} i & i+1 \\ \swarrow & \searrow \\ & \end{matrix} = v_i \xrightarrow{R \in R} x R_{i, i+1}, \quad \begin{matrix} i & i+1 \\ \swarrow & \searrow \\ & \end{matrix} = v_i^{-1} \xrightarrow{R \in R} \frac{1}{x} R_{i, i+1}^{-1}$$

Замыкаем нити косы справа от косы и замыкаем i -ой нити сопоставляем в выражении \mathfrak{zR} -следа:

$$\text{Tr}_{\mathfrak{zR}_{(i)}} = \frac{1}{\mathfrak{z}} \text{Tr}_{R_{(i)}} = \frac{1}{\mathfrak{z}} \text{Tr}_{(i)} D_i^R \dots$$

Таким образом, замыкаем всю косу $x \in V_n$ сопоставляем выражение $f_{L_x}(q, \mathfrak{z})$

$x \in V_n \mapsto L_x =$ 
 коса

ориентированный узел/зацепление

Замыканию справа сопоставляется $\text{Tr} D^R$.
 При выборе замыкания слева надо сопоставить $\text{Tr} C$
Смешивать правое и левое замыкание нельзя

$$f_{L_x}(q, \mathfrak{z}) := \text{Tr}_{\mathfrak{zR}_{(1 \dots n)}} \rho_{\mathfrak{zR}}(x) = \frac{1}{\mathfrak{z}^n} \text{Tr}_{(1 \dots n)} D_1^R \dots D_n^R \rho_{\mathfrak{zR}}(x)$$

Функция f_{L_x} является многочленом по $q^{\pm 1}$ и $\mathfrak{z}^{\pm 1}$ (увидим позже). Она также может зависеть от характеристик R -матричного представления, например от $\dim V$. Она не зависит от параметров R -матричного представления, связанных с преобразованием твиста (см. (13), (14) в 1-й части замско про R -матрицу).
 Например для R_{DJ} (см. (10) 1-й части замско) f_{L_x} не зависит от параметров \mathfrak{z}_{ij} .

Утверждение $f_{L_x}(q, \mathfrak{z})$ — инвариант ориентированного зацепления/узла L_x , если выбрать

$$\alpha^2 = 1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } D^R$$

(4)

(9)

Доказательство:

1) Поскольку $\rho_{\alpha R}$ является представлением группы $f_{L\alpha}$ относительно кос, очевидно инвариантность ρ -числа $f_{L\alpha}$ относительно движений Рейдемейстера II и III типов внутри коса α , (18, в)

2) В силу циклического свойства следа, а также следующей из Следствия 2 из леммы о косообратимых R-матрицах (см. (178) на стр 9): $[D_1^R D_2^R, R_{12}] = 0$

имеем:

$$(D_1^R \dots D_n^R) \rho_{\alpha R}(x) = \rho_{\alpha R}(x) (D_1^R \dots D_n^R),$$

откуда следует циклическость R-следа для операторов R-матричных представлений:

(5)

$$\text{Tr}_{R(1\dots n)} \rho_R(x) \rho_R(y) = \text{Tr}_{R(1\dots n)} \rho_R(y) \rho_R(x)$$

$\forall x, y \in V_n$

(Здесь R можно заменить на αR).

Следовательно $f_{L\alpha}$ инвариантна относительно марковских преобразований I типа (2а).

3) Инвариантность относительно движений Рейдемейстера I типа (1а), или же марковские преобразования II типа (2б), достигается выбором α .

Действительно, инвариантность $f_{L\alpha}$ относительно (2б) с $\varepsilon = +1$ выполняется для $\forall \alpha$:

$$V_n \ni \alpha \leftrightarrow \alpha \in V_n \iff$$

$$\text{Tr}_{\alpha R(n+1)} \rho_{\alpha R}(x) (\alpha R)_{n+1} = \rho_{\alpha R}(x)$$

Чтобы обеспечить выполнение (28) при $\varepsilon = -1$ (10)
 подберём подходящую x :

$$V_n \ni x \leftrightarrow x v_n^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbb{Z}R(n+1)} \rho_{\mathbb{Z}R}(x) (xR)_{n+1}^{-1} &= \frac{1}{x^2} \text{Tr}_{R(n+1)} \rho_{\mathbb{Z}R}(x) R_{n+1}^{-1} = \\ &= \frac{(1 - (q - q^{-1}) \text{Tr} D^R)}{x^2} \text{Tr}_{R^{-1}(n+1)} \rho_{\mathbb{Z}R}(x) R_{n+1}^{-1} = \frac{1 - (q - q^{-1}) \text{Tr} D^R}{x^2} \rho_{\mathbb{Z}R}(x) \end{aligned}$$

применим формулу (238) для выражения D_R через $D_{R^{-1}}$ и
 запись про косообратимые R -матрицы (см. стр. 14).

Итак, при выполнении условия (4) функция f_{Lx} инвариантна относительно преобразований Маркова II типа. ▣

Заметим, что в формулах (3), (4) для f_{Lx} явно присутствуют 3 параметра: x , q и $\text{Tr}_R \text{Id} = \text{Tr} D^R =: d$.
 Только один из этих параметров — d — зависит от явно-го вида геккевской R -матрицы, но формула (4) может быть матрицирована не как выражение для x в терминах q и d , а как выражение для d в терминах независимых q и x :

$$d = \frac{1 - x^2}{q - q^{-1}} \quad (4')$$

Остаётся только уточнить: а действительно ли d — независимый от q параметр? Возмемши d для

R -матрицы Дринкельда-Джимбо даём:

$$d = \text{Tr} D^{R_{DS}} = q^{-N} [N]_q \quad (\text{см формулу (27a) запись по косообратимым } R\text{-матрицам})$$

Значит, для каждой конкреткой R^{DJ} ($N = \dim V$ - (11) фиксировано) параметр d не зависит от q .

Но если рассматривать всю серию R^{DJ} целиком (т.е., считать N целой переменной), то d и q - независимы.

Аналогично для пары q и x : условие (4) для R^{DJ} даёт $x^2 = q^{-2N}$, т.е. можно выбрать

$$\boxed{R^{DJ} \rightarrow x = q^{-N}} \quad (6)$$

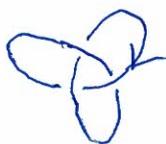
Если считать $N \in \mathbb{Z}$, то q и x остаются независимой парой.

Таким образом \mathfrak{f}_{Lx} - инвариант ориентированных зацеплений/узлов, зависящий, как минимум, от двух переменных q и x . Попытки подставить другие, отличные от R^{DJ} геккевские R -матрицы, не приводят к появлению дополнительных параметров (скажем R^{KS} ничего нового не даёт).

Естественно предположить, что вогислевские \mathfrak{f}_{Lx} не зависят от конкретного вида геккевской R -матрицы, а определяется алгебраической структурой $H_n(q)$.

Чтобы это проверить, вогислевские примеры.

(A) Триплетикс:



Ориентированную таким образом трилистнику мы сопоставим коцу $v_1^3 \in B_2$ (см. стр. 3), коцую

$$f_{\text{Трилистн.}} = \text{Tr}_{\mathbb{R}(12)} \rho_{\mathbb{R}}(v_1^3) = \frac{x^3}{x^2} \text{Tr}_{\mathbb{R}(12)} \rho_{\mathbb{R}}(g_1^3) \stackrel{*}{=} \dots$$

Для генераторов ал. Гекке выполняются соотношения Гекке:

Заменим $v_1 \mapsto g_1$, т.к. $\rho_{\mathbb{R}}$ - представление алгебры Гекке

$$g_1^3 = (1 + \lambda^2)g_1 + \lambda \cdot 1$$

где $\lambda := q - q^{-1}$

Вычислим \mathbb{R} -следы: $\text{Tr}_{\mathbb{R}(2)} R_{12} = \text{Id}_1, \text{Tr}_{\mathbb{R}} \text{Id} = d$

$$\stackrel{*}{=} x \text{Tr}_{\mathbb{R}(12)} \{ (1 + \lambda^2) R_{12} + \lambda \text{Id}_{12} \} \stackrel{\checkmark}{=} x \{ (1 + \lambda^2)d + \lambda d^2 \}$$

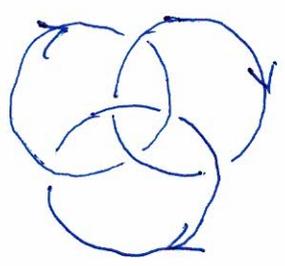
Последнее выражение преобразуем к удобному виду, выразив d через x (см. (4')) и учитывая, что

$$f_{\mathbb{O}} = \text{Tr}_{\mathbb{R}} \rho_{\mathbb{R}}(1) = \frac{1}{x} \text{Tr}_{\mathbb{R}} \text{Id}_1 = \frac{d}{x} \quad (7)$$

$$f_{\text{Трилистн.}} = \frac{d}{x} \cdot x^2 \left\{ 1 + \lambda^2 + \lambda d \right\} = f_{\mathbb{O}} \cdot x^2 \{ 2 + \lambda^2 - x^2 \}$$

(8)

Б Зацепление "Кольца Борромео"



с указанной ориентацией соответствует замыканию

костя $b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1}$

$$f_{\text{кол. Борромео}} = \text{Tr}_{\mathbb{R}(123)} \rho_{\mathbb{R}}(b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^3} \text{Tr}_{\mathbb{R}(123)} \rho_{\mathbb{R}}(g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1})$$

Для вычисления R-следа преобразуем это выражение

$$g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} = \underbrace{(g_1 g_2 g_1)}_{\text{соотн. кос}} g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} - \lambda \underbrace{g_1^2 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1}}_{\text{Гекке}} =$$

|| Гекке
 $(g_2 - \lambda \cdot 1)$

$$\rightarrow \underbrace{g_2 g_1^2 g_2^{-1}}_{\text{цикл.}} - \lambda \underbrace{g_1^2 (g_2 g_1 g_2^{-1})}_{\text{соотн. кос}} + \lambda^2 \underbrace{g_1^3 g_2^{-1}}_{\text{Гекке}} =$$

Учитываем циклическое свойство (5) R-следа

$$\stackrel{\text{цикл.}}{=} g_1^2 - \lambda \underbrace{g_1 g_2 g_1}_{\text{цикл.}} + \lambda^2 g_1^3 g_2 - \lambda^3 g_1^3 =$$

$$\stackrel{\text{цикл.}}{=} g_1^2 - \lambda^3 g_1^3 - \lambda g_1^2 g_2 + \lambda^2 g_1^3 g_2$$

⊗ Обратим внимание, что при преобразовании мы добились, чтобы старший артиков генератор $g_2 \in H_3$ встречался в окончательном выражении не более 1 раза. — это общая стратегия вычисления f_{Lx} .

⊗ И еще: было удобно делать циклическую пере-стаканку, чтобы добиться упрощений. В принципе этого делать было не обязательно.

Результат:

$$f_{\text{кол. Борромео}} = \frac{1}{\alpha^3} \text{Tr}_{\mathbb{R}(123)} \rho_{\mathbb{R}}((g_1^2 - \lambda^2 g_1^3) + (\lambda^2 g_1^3 - \lambda g_1^2) g_2) =$$

$$\overline{\uparrow} \frac{d}{x^3} \text{Tr}_{R(12)} \rho_R(g_1^3 - \lambda^2 g_1^3) + \frac{1}{x^3} \text{Tr}_{R(12)} \rho_R(\lambda^2 g_1^3 - \lambda g_1^2) \quad (14)$$

Вычислим $\text{Tr}_{R(3)}$

Для дальнейшего преобразования вычислим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}_{R(12)} \rho_R(g_1^2) = d^2 + \lambda d = d(d + \lambda) \\ \text{Tr}_{R(12)} \rho_R(g_1^3) = \lambda d^2 + d(1 + \lambda^2) = d(1 + \lambda^2 + \lambda d) \end{array} \right.$$

С учётом $d = \frac{1-x^2}{\lambda}$ окончательно вычислим

$$\boxed{f_{\text{кон. Борроне}}} = \frac{d}{x^3} \{ d^2 - \lambda^2 + \lambda^2 (1 - \lambda d)(1 + \lambda d + \lambda^2) \} =$$

$$= \frac{d}{x} \left\{ \frac{(1-x^2)^2}{\lambda^2 x^2} - \frac{\lambda^2 (1-x^2)^2}{x^2} + \lambda^4 \right\} =$$

$$\boxed{= f_0 \cdot \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda^2\right) + \lambda^4 \right\}} \quad (9)$$

Итак, мы проиллюстрировали метод вычисления f_{Lx} с использованием алгебраических соотношений в $H_n(q)$, циклического свойства R-следа и формулы $\text{Tr}_{R(2)} R_{12} = \text{Id}_1$ и $\text{Tr}_R \text{Id} = d$. Больше ничего и не требуется \Rightarrow инвариант f_{Lx} связан с $H_n(q)$, а не её конкретным R-матричным представлением.

f_{Lx} — это практически знаменитый HOMFLY-

(PT) полином $P_{Lx}(x, \lambda)$.

Формула связи:

$$P_{Lx}(x, \lambda) = \frac{f_{Lx}(q, x)}{f_a(q, x)} \Big|_{q \mapsto \lambda := q - q^{-1}} \quad (10)$$

Фактически в выражении для формулы (8) и $f_{\text{кон. Борромео}}$ (9) мы уже осуществили замену переменной $q \mapsto \lambda$. Возвратиться с λ удобнее.

Кембриг история: Многочлен HOMFLY-(PT) открыли

независимо Peter Freyd, David Yetter, Jim Hoste, William Lickorish, Kenneth Millett, Adrian Ocneanu (FXHLMO - коридор авторов в совместной статье) в 1985г., и Josef Przytycki, Pawel Traczyk в 1987г.

Этот многочлен обобщают замкнутые многочлены от одной переменной:

⊛ Многочлен Джонса (Vaughan Jones), 1984г.

$$V_L(t) = P_L(x, \lambda) \Big|_{\substack{x=t \\ \lambda=t^{1/2}-t^{-1/2}}} \quad (11)$$

→ Фактически многочлен Джонса соответствует $N = \dim V = 2$ случаю в наших R-матричных рассмотрениях. В этом случае $x = q^{-2}$ (см. (6)) и $\lambda = q - q^{-1}$, это заменой $q = -t^{-1/2}$ даёт многочлен Джонса.

⊛ Многочлен Александера-Коквея

J. W. Alexander II, 1923г.; John Conway 1969г.

В нормировке Кошвеля:

(16)

$$C_{L_x}(\lambda) := P_{L_x}(x, \lambda) \Big|_{x=1} \quad (12a)$$

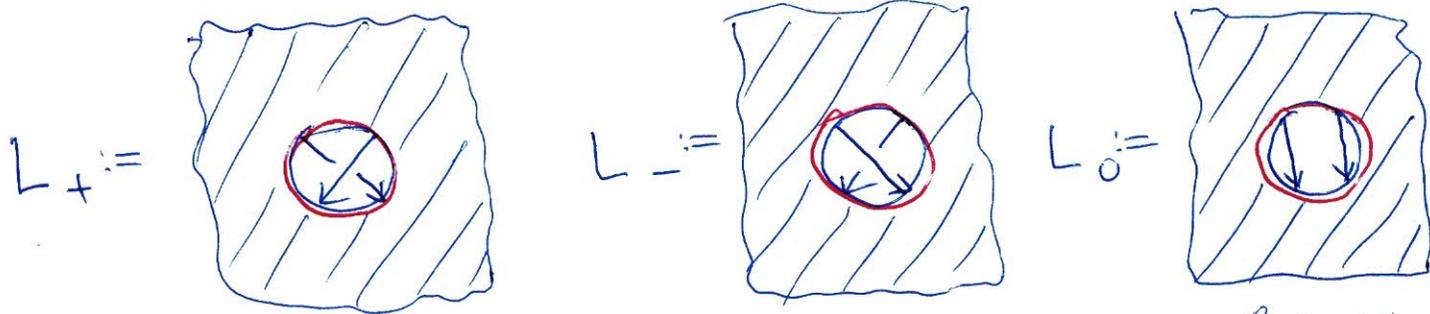
Нормировка Александера:

$$A_{L_x}(t) := C_{L_x}(\lambda) \Big|_{\lambda = t^{1/2} - t^{-1/2}} \quad (12b)$$

Для всех этих многоцветков есть графически удобное описание, использующее, так называемые, скейн-соотношения (skein relations), т.е. соотно-

шения размотки (англ. — моток / шенки размотки).

Введем обозначения для тройки взаимно-связанных ориентированных зацеплений/узлов



Проекция этих зацеплений тождественно верде, кроме одного пересечения, где они выглядят, как указано на рисунке.

Теорема

Инвариант $f_L(q, x)$ одно-

значно характеризуется скейн-соотношением

$$\frac{1}{x} f_{L_+} - x f_{L_-} = \lambda f_{L_0} \quad (\lambda := q - q^{-1}) \quad (13)$$

и значением на тривиальном узле

$$f_{\bigcirc} = \frac{1}{x} \text{Tr} D^R = \frac{d}{dx} = \frac{x^{-1} - x}{q - q^{-1}} \quad (\text{см}(4'))$$

Доказательство:

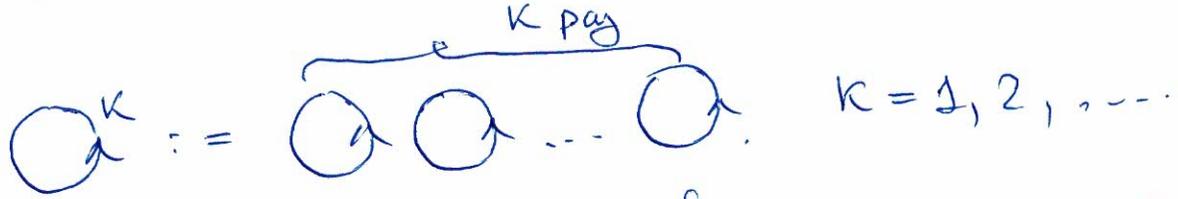
следует

скейн-соотношению из соотношения Тейлора для

R-матрицы:

$$\frac{1}{x} (xR) - x (xR)^{-1} = \lambda \text{Id}.$$

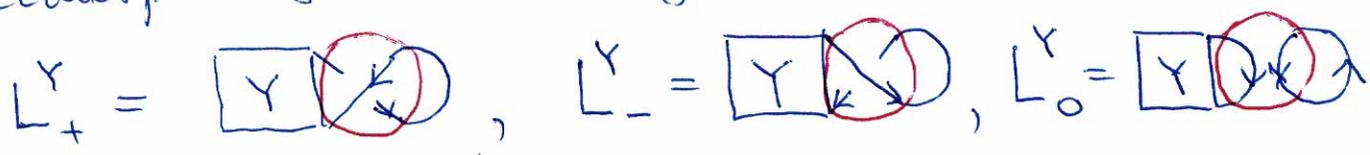
Заметим, что с использованием скейн-соотношения за конечное число шагов любой узел/зацепление можно "размотать" в линейную комбинацию зацеплений вида:



Остается убедиться, что f_{\bigcirc^k} однозначно

вычисляется, если мы знаем f_{\bigcirc} .

Рассмотрим зацепления вида:



Замерая, что

$$L_+^Y = L_-^Y = \boxed{Y|D}, \text{ и}$$

выбирая $\boxed{Y|D} = \mathbb{Q}^k$ мы получаем, что

для таких зацеплений скейн-соотношения (13)

дают уравнения:

$$\boxed{(\frac{1}{\lambda} - \lambda) f_{\mathbb{Q}^k} = \lambda f_{\mathbb{Q}^{k+1}}},$$

откуда следует:

$$\boxed{f_{\mathbb{Q}^k} = \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \lambda}{\lambda}\right)^{k-1} f_{\mathbb{Q}}} \quad (14) \quad \square$$

$\forall k > 1$

Реш Скейн-соотношения для полиномов в Дюжонсе и Кокева имеют вид:

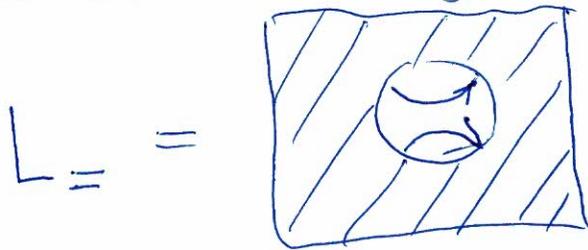
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{t} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{L_0}(t) \\ C_{L_+}(\lambda) - C_{L_-}(\lambda) &= \lambda C_{L_0}(\lambda) \end{aligned} \right.$$

Граничные условия для них таковы

$$\boxed{P_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}} = C_{\mathbb{Q}} = 1}$$

Фундаментальные замечания об инвариантах зацеплений (19)
связанных с другими фактор-алгебрами группы кос
и их R -матричным представлением.

(А) Алгебра Бирман-Мураками-Везье $BW_n(q, \mu)$
имеют R -матричное представление только при определен-
ных значениях μ : $\mu = \pm q^{z(n)}$, $z(n)$ - целое число. По-
таким R -матрицам строится инвариант Кауфмана
1990₂ /Luis Kauffman/. Он также зависит от
2-х переменных: одна из них - q или $\lambda = q - q^{-1}$; вторая
связана с $\text{Tr} D^R$. Для инварианта Кауфмана также
имеются скейн-соотношения, в которых присут-
ствует 4-е сложное вида



Это наиболее общее из известных сегодня скейн-
соотношений.

(Б) Процедурой Fusion у геккевских и
 BW -типов R -матриц можно строить более
сложные R -матрицы, с минимальными многочле-
нами высших (> 3) степеней. По всей видимости,
для них тоже удастся построить хорошую операцию

R-следа, убавляющую марковские преобразования (20)

II типа (\equiv движения Рейдемейстера I типа). Известен рецепт построения такой операции в рамках дуального

подхода: ленточные алгебры Хопфа - ribbon Hopf

algebras - это квадрантные алгебры Хопфа, стандартные, ленточным элементом. Из этого ленточного

элемента строится R-след, называемый в этом подходе q-следом или квантовым следом. Проблема

такого подхода - нетривиальность вописания универсальной R-матрицы и ленточного элемента. Подход ре-

ализован в простейшем случае ленточной алгебры Хопфа, связанной с $U_q \mathfrak{sl}(2)$. На нашем двойствен-

ном уровне - это fusion простейшей R-матрицы Дринкельда - Джимбо, действующей над $V: \dim V = 2$

Подход даёт семейство крашеной поинво-

лов Джонса (colored Jones polynomials) - Николай

Решетихин, Владимир Тураев, 1991. Эти многочлены

зависят от одной непрерывной и одной дискретной переменной n (цвет): $V_L^n(q)$, q - непрерывна.

$$\left| V_L^n(q) \right|_{n=2} = V_L(q).$$

