Семинар 6.

Везде в задачах основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто характеристики 0, $(x_0 : ... : x_n)$ - однородные координаты в пространстве $\mathbb{P}^n$, $F(x_0, ..., x_n)$ - форма степени d от переменных $x_0, ..., x_n$. Через $V(F)$, как обычно, обозначается гиперповерхность $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$.

Задача 1. Проверьте, что взятие поляры точки a относительно X коммутирует с ограничением на подпространство, проходящее через точку a.

Задача 2. Пусть X – гладкая кубическая кривая в $\mathbb{P}^2$ и $a \in X$. Как мы знаем из свойств поляр, поляра $= P_a(X)$ точки a относительно X проходит через точку a. Проведем через точку a общую прямую l, пересекающую кубику X в точках a, b и c и конику C в точках a и d. Докажите, что $(adbc)$ – гармоническая четверка. (*Указание.* Воспользуйтесь задачей 1.)

Задача 3. Пусть уравнение кубической кривой X в $\mathbb{P}^2$ приведено в аффинной карте U (см. обозначения в задаче 2) к *нормальной форме Вейерштрасса*

$$y^2 = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3), \qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \in \mathbf{k}, \tag{1}$$

Докажите, что X неособа тогда и только тогда, когда скаляры $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ различны.

Пусть, как и выше, $X = V(F)$ - гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, где $\deg F = d$, и $a \in X$. Пусть l - касательная прямая к X в точке a. Возьмем произвольную точку $b \in l$, $b \neq a$, и пусть $f(\lambda) := F(a+\lambda b)$ имеет корень $\lambda = 0$ по меньшей мере кратности 3. В этом случае l называется *касательной перегиба в точке* $a \in X$. (Если при этом $n = 2$, то есть X - кривая в $\mathbb{P}^2$, то точка a называется *точкой перегиба* кривой X.) Предпоследняя ($(d-2)$-ая) поляра $Q_a(X) := P_a^{d-2}(X)$ точки a относительно X является гиперповерхностью степени 2 (гиперквадрикой) в $\mathbb{P}^n$. Она называется *полярной квадрикой* точки a относительно гиперповерхности X. На семинаре 6 было показано, что l является касательной перегиба в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $l \subset \mathbb{T}_a X \cap Q_a(X)$.

Пусть теперь $n = 2$, а $(x_0 : x_1 : x_2)$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2)$ - форма степени d, $X = V(F)$ - кривая в $\mathbb{P}^2$. Тогда полярная коника $Q_a(X) = P_a^{d-2}(X)$ точки $a \in \mathbb{P}^2$ относительно кривой X имеет уравнение:

$$Q_a(X) = \{\sum_{i,j=0}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 0\}.$$

Дадим еще одно определение. Кривая $He(X)$ с уравнением

$$He(X) = \{x \in \mathbb{P}^2 \mid \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = 0\}. \tag{2}$$

называется *гессианом* (или *кривой Гессе*) кривой X. Нетрудно видеть, что гессиан $He(X)$ имеет степень $3(d-2)$. (В частности, гессиан кубической кривой является также кубической кривой.)

Задача 4. Докажите, что

$$X \cap He(X) = \mathrm{Sing} X \cup \{\text{множество точек перегиба кривой } X\},$$

то есть каждая точка пересечения кривой X с ее гессианом $He(X)$ либо является особой точкой кривой X, либо является точкой перегиба на X.