Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Весна 2025.

Задания с 16 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) У нас остались две неразобранные задачи, результатами которых мы активно пользовались.

а) **1г с 14 занятия** Все геометрические реализации системы Штейнера из 9 точек (т.е. $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$) на проективной плоскости проективно эквивалентны.

б) **2в с 15 занятия** Пусть a — неособая точка кубической гиперповерхности X, тогда $P_a X$ это некоторая квадрика, неособая в точке a, а $P_{a^2}X = \mathbb{T}_a X$. Пусть прямая l, проходящая через точку a, пресекает кубику еще в двух различных точках b и c. Тогда l пересекает полярную квадрику $P_a X$ в еще одной точке d, отличной от a, b и c (почему?). Докажите, что это гармоническая четверка точек, т.е. $(adbc) = -1$. [Эту задачу легко свести к одномерной, показав, что операции взятия поляры и ограничения на подпространство перестановочны.]

(2) Докажите, что если $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$, где F — форма степени d, $a \in \mathbb{P}^n$, то k-ая поляра $P_{a^k}X$, являющаяся гиперповерхностью степени $d-k$, задается уравнением

$$\sum \frac{\partial^{d-k} F}{\partial x_0^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(a)\; x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = 0, \qquad i_0 + \dots + i_n = d - k.$$

(3) На занятии мы выяснили, что если a — точка перегиба плоской кривой $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, где F — форма степени d, то полярная коника $P_{a^{d-2}}X$ распадается, поэтому, согласно предыдущей задаче, 3×3-матрица $(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})$ вырождена. Эта матрица называется *матрицей Гессе* формы F, форма $\operatorname{He} F = \det(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})$ — *гессианом* формы

F, а кривая $\operatorname{He} X = V(\operatorname{He} F)$ — *гессианом* кривой X. Докажите, что $X \cap \operatorname{He} X$ состоит из точек перегиба и особых точек кривой X.

(4) Покажите, что если a — точка перегиба плоской гладкой кубической кривой $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, где F — кубическая форма, то полярная коника $P_a X$ есть объединение двух различных прямых, одна из которых является касательной в точке перегиба: $P_a X = \mathbb{T}_a X \cup l_{a,X}$, причем точка пересечения $\mathbb{T}_a X \cap l_{a,X}$ не лежит на X. Эта вторая прямая $l_{a,X}$ называется *гармонической полярой* кубики в точке перегиба a. Покажите, что кубика X инвариантна относительно гармонической инволюции плоскости $\mathbb{P}^2$, оставляющей на месте точку a и прямую $l_{a,X}$.

(5) В условиях предыдущей задачи покажите, что особая точка поляры $P_a X$, т.е. точка $\mathbb{T}_a X \cap l_{a,X} \in \operatorname{He} X$, причем $\operatorname{He} X$ касается $\mathbb{T}_a X$ в этой точке.

(6) Мы выяснили, что неособая плоская кубика X всегда имеет 9 точек перегиба, образующих систему Штейнера, и, поскольку все системы Штейнера проективно эквивалентны, эта кубика проективно эквивалентна некоторой кубике X_λ из *пучка Гессе* (другое название — *сизигический пучок*), задаваемого уравнением

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \lambda x_0 x_1 x_2 = 0.$$

   а) Покажите, что если a — одна из 9 точек перегиба кривых из пучка Гессе, то касательные прямые $\mathbb{T}_a X_\lambda$ образуют пучок прямых, проходящих через точку a.

   б) Покажите, что если a — одна из 9 точек перегиба кривых из пучка Гессе, то гармоническая поляра l_{a,X_λ} одинакова у всех кубик пучка Гессе. [Покажите, что поляры $P_a X_\lambda$ образуют пучок распавшихся коник, а затем воспользуйтесь (очень просто получаемой) классификацией пучков распавшихся коник на плоскости.]