Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Задачи про кубические кривые.

В нашем курсе мы обсуждали геометрию плоских кубик, но некоторые красивые геометрические факты были только упомянуты, им и посвящен приведенный ниже список задач. Этот список задач не является домашним заданием и будет обсуждаться только по заявкам слушателей. Для удобства мы приводим здесь краткий список того, что мы уже разобрали о геометрии кубик.

Неособая кубическая кривая имеет ровно 9 точек перегиба $a_1, \dots, a_9$, причем эти 9 точек образуют систему Штейнера, изоморфную $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ — аффинной плоскости над полем из трех элементов. Конфигурация этих 9 точек единственна с точностью до проективного преобразования, поэтому любая неособая кубика на плоскости проективно эквивалентна одной из кривых этого пучка, классики называли его *сизигическим пучком.* Все кубики из сизигического пучка имеют точки перегиба в этих же 9 точках; гессиан любой кубики из сизигического пучка также принадлежит этому пучку. Если a_i — любая из девяти точек перегиба, а X — неособая кубика из сизигического пучка, то поляра $P_{a_i}X$ представляет собой распавшуюся конику, неособую в точке a_i, т.е. объединение двух прямых, одна из которых это касательная $\mathbb{T}_{a_i}X$, а вторая, которую мы обозначим l_i и будем называть *гармонической полярой* точки a_i.

(1) Докажите, что гармоническая поляра l_i одна и та же для всех неособых кубик из сизигического пучка.

(2) Докажите, что в сизигическом пучке ровно четыре особые кубики, каждая из которых представляет собой тройку прямых, "параллельных" в смысле геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.

(3) Пусть $\mathbb{P}^1$ — база сизигического пучка, отметим на ней четыре точки, отвечающие особым кубикам. Докажите, что группа проективных преобразований $\mathbb{P}^1$, сохраняющих эту четверку точек, есть знакопеременная группа A_4. Каково двойное отношение этих четырех точек? Верно ли, что кубики, отвечающие точкам одной орбиты этого действия, проективно эквивалентны?

(4) Докажите, что все кубики из сизигического пучка (в том числе и особые) неособы в точках $a_1, \dots, a_9$, причем для любой прямой, проходящей через точку a_i существует ровно одна кубика из сизигического пучка, для которой эта прямая является касательной в точке a_i.

(5) а) Докажите, что особенность поляры $P_{a_i}X$ (т.е. точка пересечения прямых $\mathbb{T}_{a_i}X$ и l_i) лежит на гессиане $\mathrm{He}(X)$ кривой X, причем $\mathrm{He}(X)$ касается прямой $\mathbb{T}_{a_i}X$ в этой точке.

б) Выведите отсюда, что каждая неособая кубика из сизигического пучка является гессианом ровно трех кубик из сизигического пучка, причем все три эти кубики неособы, а каждая особая является гессианом самой себя и еще одной неособой кубики. Покажите, что в этом последнем случае неособая кубика проективно эквивалентна кубике Ферма $x_0^3+x_1^3+x_2^3=0$.

(6) Докажите, что если три точки перегиба, скажем, a_1, a_2, a_3, лежат на одной прямой m, то их гармонические поляры l_1, l_2, l_3 пересекаются в точке пересечения двух других таких прямых, "параллельных" прямой m в смысле геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Выведите отсюда, что гармонические поляры $l_1, \ldots, l_9$ образуют систему Штейнера в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$.

(7) Докажите, что для каждой точки перегиба a_i, $i=1,\ldots,9$, проективная инволюция σ_i проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, оставляющая неподвижными точку a_i и гармоническую поляру l_i, переводит любую кубику из сизигического пучка в себя.

(8) Опишите группу G проективных преобразований плоскости, переводящих в себя систему Штейнера $a_1, \ldots, a_9$. Очевидно, это подгруппа аффинной группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3))$. Опишите подгруппу $H \subset G$ тех проективных преобразований, которые переводят в себя каждую кубику из сизигического пучка. Совпадает ли она с подгруппой в G, порожденной инволюциями $\sigma_1, \ldots, \sigma_9$ из предыдущей задачи?

(9) Как устроен гомоморфизм $G \to A_4$ (см задачу 3)?