Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задачи с 5 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) При доказательстве того, что любой неприводимый многочлен степени n над полем $\mathbb{F}_p$ является делителем многочлена $t^{p^n} - t$, мы воспользовались следующим простым утверждением, которое предлагается доказать. Пусть поле $\mathbb{K}$ является подполем поля $\mathbb{L}$, и даны три многочлена $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ из $\mathbb{L}[t]$, причем $A(t) = B(t)C(t)$. Тогда если коэффициенты многочленов $A(t)$ и $B(t)$ лежат в меньшем поле $\mathbb{K}$, то и $C(t) \in \mathbb{K}[t]$.

(2) Пусть $\mathbb{L}$ — конечное поле, $\operatorname{char} \mathbb{L} = p$, тогда $\mathbb{L}$ является конечномерным векторным пространством над простым подполем $\mathbb{F}_p$, а автоморфизм Фробениуса $\Phi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ (напомним, по определению $\Phi(x) = x^p$) является линейным (над $\mathbb{F}_p$) оператором в этом пространстве. Найдите характеристический и минимальный многочлены этого линейного оператора.