

Семинар 21

Евклидово пространство

Во всех задачах координаты точек указаны в декартовом репере.

1. Найти сохраняющее ориентацию движение g евклидовой плоскости, переводящее точку $(0, 2)$ в точку $(1, \sqrt{3})$, а точку $(1, \sqrt{3})$ в точку $(2, 2)$. Есть ли у движения g неподвижная точка?
2. Найти отличное от тождественного движение трехмерного евклидова пространства, которое оставляет точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ на месте.
3. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $(4, 2, -5, 1)$ на плоскость $2X_1 - 2X_2 + X_3 + 2X_4 = 9$, $2X_1 - 4X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 12$.
4. Расстояние между плоскостями $A + W_1$, $B + W_2$ евклидова пространства равно длине ортогональной проекции вектора AB на подпространство $(W_1 + W_2)^\perp$. Доказать.
5. Найти расстояние между плоскостями, если одна плоскость проходит через точки $(4, 5, 3, 2)$, $(5, 7, 5, 4)$, $(6, 3, 4, 4)$, а другая – через точки $(1, -2, 1, 3)$, $(3, -2, 3, -2)$, $(2, -4, 1, -4)$.
6. В четырехмерном кубе $0 \leq X_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, найти расстояние между его двумерной гранью и его диагональю, которая эту грань не пересекает.
7. Найти угол между диагональю n -мерного куба и его k -мерной гранью.
8. Найти расстояние между k -мерной гранью правильного n -мерного симплекса с ребром длины 1 и противоположной ей $n - k - 1$ -мерной гранью.
9. Найти угол между:
 - а) ребрами;
 - б)* двумерными гранями правильного четырехмерного симплекса.
10. Какие трехмерные многогранники получаются в сечении четырехмерного куба $0 \leq X_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, трехмерной гиперплоскостью $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = q$, при $q = 0, 2, 3, 4$.
- 11**. У любой абелевой подгруппы группы движений евклидова пространства имеется единственная максимальная (по включению) инвариантная плоскость (возможно, нульмерная), на которой эта подгруппа действует параллельными переносами. Доказать.