

Листок 2

(может служить для подготовки к контрольной 18 марта)

1. Пары противоположенных сторон правильного восьмиугольника отождествляются с помощью параллельного переноса. Определить топологический тип поверхности, получившейся в результате такой склейки сторон восьмиугольника.

2. Рассмотрим замощение плоскости правильными треугольниками. Доказать, что вершины этого замощения образуют систему Делоне и указать замощение Делоне, связанное с этой системой.

3. К системе Делоне предыдущей задачи добавим центры тяжести треугольников. Найти замощение Делоне для этой новой системы.

4. Пусть Γ – дискретная группа движений компактного метрического пространства. Доказать, что группа Γ конечна.

5. Группа движений евклидовой плоскости порождается параллельными переносами $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$, $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + a)$. Построить для этой группы фундаментальную область Вороного с центром в точке $(0, 0)$. Как ответ зависит от a ?

6. Рассмотрим на вещественной прямой действие бесконечной циклической группы, порожденной преобразованием $x \rightarrow 2x$. Будет ли рассматриваемое действие дискретным на множестве положительных чисел? Если ответ да, то построить фундаментальную область этой группы.

7. Может ли кристаллографическая группа движений трехмерного евклидова пространства порождаться тремя центральными симметриями? Четырьмя центральными симметриями?

8. Те же вопросы, что и в условии задачи 7, но с заменой центральной симметрии на поворот на 180 градусов вокруг прямой.

9*. Рассмотрим на евклидовой плоскости систему точек $((k + 1)/4, (l + 1)/2)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Построить замощение Делоне для этой системы.