Семинар 7

Задача 1. [9 точек перегиба у кубики в Вейерштрассовой форме.] Покажите, что неособая кубика, заданная в Вейерштрассовой форме (в аффинных координатах) уравнением $y^2 = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени 3, имеет в аффинной плоскости ровно 8 точек перегиба (что вместе с бесконечно-удаленной точкой $(0:0:1)$ дает ожидаемое число 9). [Вычислите явно y'' как производную функции, заданной неявно, и покажите, что для неособой кубики уравнение $y'' = 0$ имеет ровно 8 решений.]

Задача 2. [Системы Штейнера.] *Системой Штейнера* называется пара $(Z, \mathcal{L})$, где Z — конечное множество, а $\mathcal{L} \subset 2^Z$ такое семейство трехэлементных подмножеств Z, что $\forall\ L \in \mathcal{L}\ |L| = 3$ и $\forall\ A, B \in Z$ $(A \neq B)$, $\exists$ единственное $L \in \mathcal{L}$, такое что $A, B \in L$. [Трехэлементные множества из $\mathcal{L}$ естественно интерпретировать как "прямые", проходящие через точки Z. На занятии мы доказали, что множество точек перегиба неособой кубической кривой является системой Штейнера.] *Геометрической реализацией* системы Штейнера над полем $\mathbb{K}$ называется такое вложение множества Z в $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, при котором $\forall\ L \in \mathcal{L}$ трем точкам из L соответствуют три точки плоскости, лежащие на одной прямой.

(1) Докажите, что число точек в любой системе Штейнера при делении на 6 может давать остатки только 1 и 3.

(2) Докажите, что любые 2 системы Штейнера из 7 точек изоморфны и придумайте какую-нибудь геометрическую реализация такой системы Штейнера. [Подсказка: такое возможно только в случае $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$.]

(3) Докажите, что любая система Штейнера из 9 точек изоморфна $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Покажите, что существует геометрическая реализация этой системы над полем $\mathbb{C}$.

(4) Докажите, что любые две геометрические реализации системы Штейнера из 9 точек на проективной плоскости проективно эквивалентны, т.е. переводятся друг в друга проективным преобразованием плоскости.

Задача 3. [Кубика Ферма.] Найдите прямым вычислением (как точки пересечения с гессианом) 9 точек перегиба кубики Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ и уравнения 12 прямых, на которых лежат тройки этих точек (это система Штейнера!).