Статистическая физика в точнорешаемых моделях. Листок 1.

Задача 1. (Термодинамические соотношения и критические индексы, 3балла)

а) Пользуясь определениями термодинамических потенциалов и соотношениями между их частными производными докажите равенства

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S},\ C_P - C_V = VT\frac{\alpha^2}{\kappa_T}$$

где $C_P, C_V, \kappa_T, \kappa_S$– изобарная, изохорная теплоемкости и изотермическая, адиабатическая сжимаемости, соответственно:

$$C_R = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_R,\ \kappa_R = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_R,$$

а $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$– коэффициент объемного расширения.

б) Пользуясь свойствами выпуклости термодинамических потенциалов, обеспечивающими требование термодинамической устойчивости вещества докажите неравенство Рашбрука

$$\alpha_- + 2\beta + \gamma_- \geq 2$$

которому удовлетворяют критические индексы, описывающие поведение термодинамических величин

$$C_p \asymp |t|^{-\alpha_\pm}, \quad \rho_l - \rho_g \asymp t^\beta, \quad \kappa_T \asymp t^{-\gamma_\pm}$$

вблизи критической температуры $T = T_c$. Индексы «$\pm$» относятся к температурам выше и ниже критической точки, т.е.

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \gtrless 0$$

соответственно.

Задача 2. (О сверхпроводящем переходе, 3 балла) Многие металлы становятся сверхпроводниками при низкой температуре T и в маленьком магнитном поле H. Теплоемкости металла в нормальной и сверхпроводящей фазах в нулевом магнитном поле $H = 0$ равны соответственно

$$\begin{aligned} C_n &= V\alpha T^3, \\ C_s &= V[\beta T^3 + \gamma T], \end{aligned}$$

где V-объем, а α, β, γ — константы. (Изменением объема в этой задаче можно пренебречь.)

а) Используя третий закон термодинамики, вычислите энтропии $S_n(T)$ и $S_s(T)$ нормальной и сверхпроводящей фаз.

b) Эксперименты показывают, что скрытая теплота перехода (теплота, затрачиваемая на превращение одной фазы в другую) равна нулю, $L = 0$. Используйте эту информацию, чтобы вычислить температуру перехода T_c как функцию α, β, γ.

c) При нулевой температуре электроны в сверхпроводнике образуют куперовские пары, что приводит к понижению внутренней энергии сверхпроводника на $V\Delta$, т.е. $U_n = E_0$ в нормальном металле, и $U_s = E_0 - V\Delta$ в сверхпроводнике. Вычислите внутренние энергии обоих фаз при конечной температуре.

d) Сравнивая свободные энергии Гиббса $G(T, H, N)$ (или химические потенциалы) двух фаз, получите выражение для энергетической щели Δ через α, β, γ.

f) В присутствии магнитного поля учет магнитной работы дает $dU = TdS + HdM + \mu dN$. Сверхпроводящая фаза — идеальный диамагнетик, не пропускающий магнитное поле внутрь, засчет появления магнитного момента $M_s = -HV/4\pi$, противоположного магнитному полю. Нормальный металл с хорошей точностью немагнитный, т.е. $M_n = 0$. Используйте эту информацию, вместе с предыдущими результатами, чтобы показать, что сверхпроводник превращается в нормальный металл в магнитном поле большем чем

$$H_c(T) = H_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)$$

и найти выражение для H_0.

Задача 3. Классические гармонические осцилляторы, 3 балла.
Рассмотрите N классических гармонических осцилляторов с координатами и импульсами p_i, q_i и гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\{p_i, q_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}\right).$$

(a)Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергиии U. (Указание: изменением масштабов длины и импульса можно превратить поверхность постоянной энергии в сферу. При больших N объем шарового слоя $2N$-мерного шара можно считать равным объему шара.)

(б)Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функцию температуры T и числа частиц N.

(в) Найдите совместную плотность вероятности импульса и координаты одного осциллятора $P(q, p)$. Вычислите среднюю кинетическую и потенциальную энергию осциллятора.

Задача 4. Квантовые гармонические осцилляторы, 3 балла.
Рассмотрите N независимых квантовых осцилляторов с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\{n_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n_i\right),$$

где микросотояние системы задается N квантовыми числами заполнения осцилляторов $n_i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$, принимающими любые неотрицательные целые значения.

(а) Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергии U. (Указание: Число $\mathcal{N}(U)$ состояний с энергией U можно представить, как число способов разложить

$M = \sum_i n_i$ шаров в N ящиков, или разделить одномерную цепочку из M шаров $N-1$ стенками.)

(б) Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функции температуры T, и числа частиц N.

(в)Найдите вероятность $f_1(n)$ обнаружиить осциллятор на уровне n.

Прокомментируйте разницу квантового и классического осцилляторов.

Задача 5. Одномерная цепочка упруго взаимодействующих осцилляторов, 3 балла.

Цепочка из $N+1$ одинаковых точечных частиц массы m соединены N упругими невесомыми пружинками с константой упругости K и длиной a в свободном состоянии. Первая и последняя частицы закреплены на расстоянии Na друг от друга. Обозначим продольное отклонения частиц от состояния равновесия $\{u_i\}$. Так как крайние частицы закреплены, $u_0 = u_N = 0$. Гамильтониан системы зависящий от смещений $\{u_i\}$ и сопряженных им импульсов $\{p_i\}$ имеет вид

$$\mathcal{H}(\{p_i, u_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2}\left[u_1^2 + \sum_{i=2}^{N-2}(u_i - u_{i+1})^2 + u_{N-1}^2\right].$$

(а) Используя Фурье-преобразование (разложение по синусам), найдите нормальные моды $\{\tilde{u}_k\}$ и соответствующие частоты $\{\omega_k\}$.
(б) Выразите гамильтониан через амплитуды нормальных мод и вычислите классическую статсумму. (Интегрирование по $\{u_i\}$ можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$.)
(в) Вычислите $\langle|\tilde{u}_k^2|\rangle$ и используйте результат, чтобы найти$\langle u_i^2\rangle$. Постройте график получившегося среднеквадратичного отклонения каждой частицы как функцию её положения равновесия.
(г) Как изменится результат, если закреплена только первая частица ($u_0 = 0$), а последняя свободна. (Это задача намного проще, так как статсумму можно вычислить, перейдя от координат N частиц к длинам $N-1$ пружинок).

Задача 6. Обобщенный идеальный газ, 4 балла.

Рассмотрите газ невзаимодействующих бесспиновых квантовых частиц с энергетическим спектром $\epsilon = |\vec{p}/\hbar|^s$, находящийся в сосуде объема V в d измерениях..

(а) Вычислите большой термодинамический потенциал $\Omega^\eta = -kT\log \mathcal{Z}^\eta$и плотность $n = N/V$ при химическом потенциале μ. Выразите ответ через s, d и функцию $f_m^\eta(z)$, где $z = e^{\beta\mu}$,

$$f_m^\eta(z) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{dx x^{m-1}}{z^{-1}e^x - \eta},$$

η полагается равной 1 или -1 для бозонов и фермионов соответственно.

(б) Найдите отношение pV/U и сравните для классического газа.

(в) Для фермионов найдите зависимость удельной внутренней энергии U/N и p от плотности $n = N/V$ при нулевой температуре. (Указание: $f_m(z) \to (\ln z)^m/m!$ при $z \to \infty$).

(г) Для бозонов найдите размерность d_s ниже которой Бозе-конденсация отсутствует. Есть ли конденсация в $d = 2$ при $s = 2$.

Задача 7. Дираковские фермионы 4, балла.

Рассмотрите газ невзаимодействующих частиц со спином 1/2, в котором имеются пары одночастичных состояний с энергиями противоположного знака

$$\mathcal{E}_\pm(\vec{k}) = \pm\sqrt{m^2c^4 + \hbar^2k^2c^2},$$

не зависящими от спина.

(а) Для произвольной фермионной системы с химическим потенциалом μ покажите, что вероятность найти занятым состояние с энергией $\mu+\delta$ равна вероятности найти незанятым состояние с энергией $\mu-\delta$. (δ— постоянная энергия.)

(б) При нулевой температуре все отрицательные дираковские состояния заняты, а все положительные свободны, т.е. $\mu(T=0)=0$. Пользуясь результатом пункта (а) найдите химический потенциал при произвольной температуре T.

(в) Покажите, что средняя энергия такой системы при конечной температуре равна

$$U(T) - U(0) = 4V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta\mathcal{E}_+(\vec{k}))+1}$$

(г) вычислите интеграл из пункта (в) для безмассовых частиц, $m=0$.

(д)Найдите теплоемкость C_V безмассовых дираковских частиц.

(е) Опишите качественно поведение теплоемкости при низких температурах для частиц с массой.

Задача 8. Модель Изинга-Кюри-Вейсса, 8 баллов

Рассмотрите ферромагнитную модель Изинга-Кюри-Вейсса на полном графе, задаваемую функцией Гамильтона

$$H(\sigma) = -\frac{J}{N}\sum_{1\le i<j\le N}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i, \quad \sigma_k = \pm1, k=1,\ldots,N,$$

реште её использованием трех термодинамических ансамблей.

(а) Вычислите микроканоническую статсумму модели без поля, $h=0$. Найдите энтропию состояния $S(U,M)$ с заданной энергией $H(\sigma)=U$ и заданной намагниченностью M в термодинамическом пределе $N\to\infty$. Найдите уравнение состояния, связывающее температуру и удельную энергию $u=U/N$.

(б) Вычислите каноническую статсумму с фиксированной температурой T и фиксированной намагниченностью M. Найдите удельную свободную энергию $f(T,m) = N^{-1}F(T,M)$ в термодинамическом пределе. Вычислите сопряженное M магнитное поле.

(в) Вычислите каноническую статсумму модели с заданным полем h и температурой T. Найдите свободную энергию $G(T,h)$, и запишите уравнение состояния, связывающее намагниченность с магнитным полем в термодинамическом пределе. Сравните с предыдущим пунктом.

(г) Вычислите критические индексы $\alpha_\pm, \beta, \gamma_\pm, \delta$.

(д) Докажите, что имеется (отсутствует) дальний порядок при при температуре ниже (выше) критической, т.е. для ковариации $\langle\sigma_1\sigma_2\rangle_c = \langle\sigma_1\sigma_2\rangle - \langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle$ двух любых спинов имеют место пределы

$$\lim_{N\to\infty} <\sigma_1\sigma_2>_c = 0, \quad T\ge T_c$$

и

$$\lim_{N\to\infty} < \sigma_1\sigma_2 >_c \neq 0, \quad T < T_c.$$

(е) Рассмотрите такую же задачу (в большом каноническом ансамбле) для магнетика со спином 1, т.е. $\sigma_i = 0, \pm 1$.

Задача 9. Модель Изинга и решеточный газ 6 баллов.

Рассмотрите решеточный газ: конфигурация атомов с химическим потенциалом μ в вершинах (полного) графа с V вершинами записывается числами заполнения $n_i = 0, 1, \quad i = 1, \ldots, V$. Энергия взаимодействия частиц даётся функцией Гамильтона

$$H(\boldsymbol{n}) = -g \sum_{1\le i<j\le V} n_i n_j.$$

Запишите большую каноническую статсумму модели и найдите большой термодинамический потенциал $\Omega(T, \mu, V) = -pV$. Связав переменные n_i с изинговскими спинами соотношением $n_i = (\sigma_i + 1)/2$, используйте результаты для модели Изинга-Кюри-Вейсса на полном графе, чтобы записать уравнения состояния решеточного газа. Запишите их приближенно при малых плотностях и сравните с уравнением состояния идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса. Идентифицируйте критическую температуру. Постройте линию фазового перехода жидкость-газ в $p-T$ осях и линии постоянных температур в $p-\rho$ осях, где ρ—плотность газа.