Механика 2025

Домашнее задание № 5

Срок сдачи задания: до конца дня **30.03.25**

---

1. Функционал
$$\Phi[y(x)] = 2y(\alpha) + \int_0^1 \left(y^2 + (y')^2\right) dx,$$
где $0 < \alpha < 1$ — фиксированная *внутренняя* точка отрезка $[0,1]$, задается на множестве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с заданными значениями на границах: $y(0) = y(1) = 0$.

а) Определите подпространство $\mathcal{A} \subset \{f \in C^0[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$ функций, на котором функционал Φ корректно определен, дифференцируем, и имеет экстремаль (т.е., уточните свойства гладкости функций подпространства $\mathcal{A}$ так, чтобы задача поиска экстремали $\Phi[y(x)]$ имела решение).

б) Найдите экстремаль функционала Φ на подпространстве $\mathcal{A}$.

2. Функционал
$$S[y(x)] = \int_0^1 \left((y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x)\right) dx$$
задан на пространстве функций $y(x) \in C^4[0,1]$ с фиксированными граничными условиями $y'(0) = 0$, $y(1) = -3$.

а) Найдите экстремаль функционала $S[y(x)]$, то есть функцию $y(x) \in C^4[0,1]$, на которой дифференциал функционала тождественно равен 0.

б) На том же пространстве функций найдите экстремаль функционала
$$F[y(x)] = S[y(x)] + 6y'(1).$$

3. Поверхность вращения "заметается" поворотом отрезка кривой
$$y(x) \in C^2[0,1], \quad y(0) = y(1) = Y,$$
в пространстве $\mathbb{R}^3$ вокруг оси $O\vec{x}$ на угол 2π (см. рис.1). Пространство снабжено неэвклидовой метрикой $g = \frac{1}{(y^2+z^2)^a}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, так что функционал площади поверхности вращения имеет вид
$$S[y(x)] = \int_0^1 2\pi\, y^{1-2a}\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$
Определите кривую $y(x)$, задающую поверхность вращения минимальной площади, для случаев

а) $a = 1$; б) $a = 1/2$; в) $a = 1/4$.

В каждом случае выясните, при каких значениях параметра Y функционал $S[y(x)]$ имеет экстремаль.

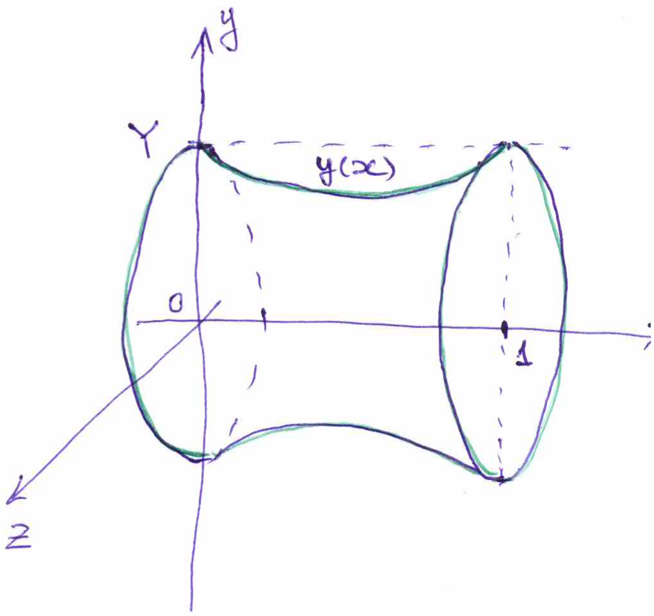

Рисунок 1.

4. Один конец *невесомой* упругой балки закрепили горизонтально в начале координат. На втором конце закрепили точечную массу m. Длина балки L. Вся система находится в однородном поле тяжести $\vec{g}$, направленном вертикально вниз (рис. 2). Определите форму балки $y(x)$ в состоянии равновесия, полагая, что линейная плотность потенциальной энергии ее упругой деформации определяется формулой $\kappa(y'')^2/2$.

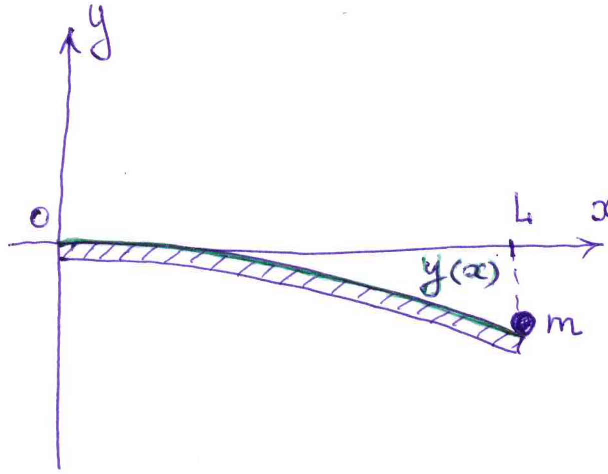

Рисунок 2.