Листок 4
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЯ II

1. Изучите набросок доказательства Леммы 8.1.5 в книге R. M. Wald. General Relativity и приведите её строгое доказательство: пусть $(\gamma_n)_n$ – последовательность причинных кривых, непродолжимых в будущее, проходящих через точку p пространства-времени $(N, \mathfrak{g})$. Тогда существует непродолжимая в будущее причинная кривая, проходящая через p, являющаяся при этом предельной кривой для $(\gamma_n)_n$.

2. Пусть дано пространство-время $(N, \mathfrak{g})$. Для любых двух различных точек $p, q \in N$ рассмотрим множество $C(p,q)$ всех непрерывных причинных кривых из p в q, направленных в будущее (кривые отличающиеся только параметризацией отождествляются). Пусть U открыто в N (в топологии на N как на многообразии). Положим

$$O(U) = \{\gamma \in C(p,q) \mid \gamma \subset U\} \subset C(p,q).$$

Определим топологию на $C(p,q)$ с базой, состоящей из множеств $O(U)$. Если $(N, \mathfrak{g})$ удовлетворяет условию причинности, то эта топология хаусдорфова и удовлетворяет второй аксиоме счётности ([1]). Проверьте, что данное определение корректно и докажите, что если $(N, \mathfrak{g})$ глобально гиперболично, то $C(p,q)$ компактно относительно этой топологии.

3. Пусть пространство-время $(N, \mathfrak{g})$ глобально гиперболично.
а) Докажите, что оно сильно причинно.
б) Докажите, что $J^{\pm}(A)$ замкнуто для всякого компакта A в N.
в) Докажите, что $J^{+}(A) \cap J^{-}(B)$ компактно в N для любых двух компактов A, B в N.

4. Пусть S ахронально в связном пространстве-времени $(N, \mathfrak{g})$.
а) Докажите, что S – поверхность Коши $\iff$ $D(S) = N$ $\iff$ $H(S) = \varnothing$ (покажите, что $\partial D(S) = H(S)$).
б) Докажите, что условие внутренней компактности выполнено на $\mathrm{Int}(D(S))$.

5. Выведете уравнение Рейчаудхури из уравнения Рикатти для изотропных порождающих: пусть γ – изотропная порождающая изотропной гиперповерхности $\mathcal{H}$ с нормальным вектором $l = \dot\gamma$ в пространстве-времени $(N, \mathfrak{g})$, тогда эволюция изотропной средней кривизны θ гиперповерхности $\mathcal{H}$ вдоль γ удовлетворяет уравнению

$$\dot\theta = -\frac{1}{n-1}\theta^2 - |\mathring{S}|^2_{\mathfrak{g}} - \mathrm{Ric}_{\mathfrak{g}}(l,l),$$

где $\mathring{S}$ – бесследовая часть оператора формы S, т.е. $\mathring{S} = S - \dfrac{1}{n-1}\theta \mathrm{Id}$, а Id – тождественный оператор на касательных к $\mathcal{H}$ векторных полях.

6. Пусть (M^n, g, K) – начальные данные для пространства-времени $(N^{n+1}, \mathfrak{g})$. Рассмотрим гиперповерхность Σ^{n-1} в M. Пусть ν – внешняя единичная нормаль к Σ в (M, g), а $\vec{n}$ – нормаль к M в $(N, \mathfrak{g})$, направленная в будущее и $(\vec{n}, \vec{n}) = -1$. Определим $l_{\pm}$ как $\vec{n} \pm \nu$. Докажите, что

$$\theta^{\pm} = \mathrm{tr}_g K \pm H,$$

где H – средняя кривизна Σ в (M, g). В частности, если выполнено условие временной симметричности $K = 0$, то $\theta^{\pm} = \pm H$.

7. Заполните пробел в доказательстве теоремы Пенроуза о неполноте: если $p \in \Omega$, то существует причинная кривая, исходящая из точки p', находящейся в окрестности точки p, которая времени подобна в некоторой окрестности точки p' и проходит через точку $q \in J^{+}(\overline{\Omega}) \setminus I^{+}(\overline{\Omega})$.

ЛИТЕРАТУРА:
[1] R. P. Geroch. Domain of Dependence.