Семинар 22

Движения. Выпуклость (в меру)

X – аффинное пространство $\mathrm{Aff}(V)$, $M \subset X$ – подмножество X, M^0 – множество его внутренних точек, $\mathrm{Aff}M$ – его аффинная оболочка, $\mathrm{Conv}M$ – его выпуклая оболочка. Назовем M фигурой, если $\mathrm{Aff}M = X$. Нужно доказать нижеследующие утверждения.

1. Несобственное движение евклидовой плоскости – это либо отражение, либо отражение с последующим параллельным переносом вдоль его зеркала.

2. Группы движений двумерного и трехмерного евклидова пространства порождены отражениями.

3. Любая конечная группа аффинных преобразований имеет неподвижную точку.

4. Пусть M – замкнутое подмножество евклидова пространства и $x \notin M$. Тогда в M существует ближайшая к x точка.

5. Если аффинная (выпуклая) оболочка любых двух точек из M лежит в M, то этим же свойством обладает аффинная (выпуклая) оболочка любого конечного числа точек из M.

6. Замыкание выпуклого множества выпукло.

7. Пусть M – выпуклая фигура. Тогда M^0 выпукло, а его замыкание содержит M.

8. Образ и полный прообраз выпуклого множества при аффинном отображении является выпуклым множеством.

9. Теорема отделимости верна для плоских выпуклых фигур.

10. Через любую точку x замкнутой фигуры M, не лежащую в M^0, можно провести такую гиперплоскость π, что $x \in \pi$, и фигура M лежит по одну сторону от π (теорема об опорной гиперплоскости).

11*. Каждая точка $x \in \mathrm{Conv}(M)$ n-мерной фигуры M является выпуклой комбинацией $(n+1)$ точек из M (зависящих, вообще говоря, от точки x и необязательно различных)(Каратеодори).

Более слабое утверждение, не ограничивающее числа точек в выпуклой комбинации, было на лекции.