Семинар 8

Напомним, что мы выяснили (см предыдущее задание), что любая неособая кубика $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ имеет ровно 9 точек перегиба, которые образуют систему Штейнера, изоморфную $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Эти 9 точек являются точками пересечения кубики X и ее гессиана $\operatorname{He} X$, задаваемого уравнением $\operatorname{He} F = 0$, где $\operatorname{He} F = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ и, следовательно, эти 9 точек являются базисными точками пучка кубик

$$X_{\lambda:\mu} = V(\lambda F + \mu \operatorname{He} F), \tag{1}$$

который называется *сизигическим пучком* или *пучком Гессе*. Поскольку любые две геометрические реализации системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ на проективной плоскости проективно эквивалентны (см также ниже задачу 4), любые два сизигических пучка кубик также переводятся друг в друга прективным преобразованием, поэтому все несособые плоские кубики содержатся в каком-нибудь одном сизигическом пучке; для конкретных вычислений удобнее всего использовать для этого кубику Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ и записывать уравнение ее сизигического пучка в виде

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\alpha x_0 x_1 x_2 = 0 \tag{2}$$

(коэффициент -3 добавлен для удобства; гессиан кубики Ферма отвечает значению $\alpha = \infty$).

Задача 1. [Особые кубики в сизигическом пучке.] Покажите, что в сизигическом пучке имеются ровно 4 особые кубики, а именно, распавшиеся в объединение трех прямых, "параллельных"в смысле системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. [На аффинной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ имеется ровно четыре пучка параллельных прямых, по 3 прямые в одном пучке. Вычисления удобнее всего проводить для пучка (2).]

Задача 2. [Пучки поляр сизигического пучка относительно точки перегиба.] Пусть a — одна из базисных точек сизигического пучка.

(1) Покажите, что $P_a X_{\lambda:\mu}$ и $P_{a^2} X_{\lambda:\mu} = \mathbb{T}_a X_{\lambda:\mu}$ представляют собой, соответственно, пучок коник и пучок прямых, причем пучок вторых поляр $P_{a^2} X_{\lambda:\mu}$ не постоянен, т.е. состоит из всех прямых, проходящих через точку a.

(2) Покажите, что в пучке коник $P_a X_{\lambda:\mu}$ имеется не менее четырех особых коник (поляры распавшихся кубик), и выведите из этого, что все коники этого пучка особые.

(3) Пользуясь результатом пункта (2), докажите, что все кубики $X_{\lambda:\mu}$ имеют перегиб в точке a. (Этот важный момент был на занятии пропущен!)

(4) Покажите, что каждая распавшаяся коника пучка $P_a X_{\lambda:\mu}$ представляет собой объединение двух прямых $\mathbb{T}_a X_{\lambda:\mu} \cup l_a$, причем прямая l_a одна и та же при всех значениях $(\lambda : \mu)$. Прямая l_a называется *гармонической полярой* точки перегиба a. [Для доказательства достаточно дать полную классификацию пучков особых коник на плоскости — она совсем несложная.]

Задача 3. [Гармонические поляры 9 точек перегиба образуют систему Штейнера на двойственной плоскости.] Пусть a — одна из базисных точек сизигического пучка, m, m' и m'' — тройка прямых, образующих одну из четырех распавшихся кубик этого пучка, и $a \in m$. Докажите, что гармоническая поляра l_a проходит через точку пересечения прямых m' и m''. [Рассмотрите проективную инволюцию плоскости, оставляющую неподвижными точку a и прямую l_a.] Выведите из этого, что гармонические поляры трех базисных точек, лежащих на прямой m, пересекаются в одной точке.

Нижеследующая задача 4 переносится в задание к следующему семинару 9, то есть ее решение нужно присылать к семинару 10, который состоится после аттестационной недели. Здесь она приведена, поскольку на нее была ссылка в предисловии.

Задача 4. [Любые две геометрические реализации системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ проективно эквивалентны.] Ниже предлагается схема доказательства, содержащая минимум координатных вычислений, отличная от обсуждавшейся на семинаре. Решение отмеченных в ней деталей нужно получить самостоятельно.

(1) **[Проективные соответствия между параллельными прямыми в конечной аффинной геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.]** Пусть даны две параллельные прямые l и m в $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$, и точка $a \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ вне этих прямых.
Покажите, что проектирование $\pi_a : l \to m$ из точки a является биекцией между l и m.
Покажите, что если $b \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ — другая точка вне этих прямых, то композиция $\pi_b^{-1} \circ \pi_a : l \to l$ является циклической перестановкой трех точек прямой l.

(2) Рассмотрим теперь геометрическую реализацию системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, а в ней — конфигурацию, описанную в предыдущем пункте, использовав для обозначения соответствующих прямых и точек те же самые буквы. Обозначим через z точку пересечения прямых l и m в $\mathbb{P}^2$. Тогда композиция двух перспектив $\varphi = \pi_b^{-1} \circ \pi_a : l \to l$ является проективным автоморфизмом прямой $l \subset \mathbb{P}^2$, сохраняющим точку z и циклически переставляющая три точки системы Штейнера, лежащие на прямой l.
Покажите, что вторая неподвижная точка автоморфизма φ это точка w пересечения прямой l с прямой ab, и что если выбрать проективные координаты на прямой l так, что $z = (1:0)$ и $w = (0:1)$, то проективный автоморфизм φ будет задаваться формулой $\varphi(x:y) = (x:\varepsilon y)$, где ε — первообразный кубический корень из единицы. [Заметьте, что ab — это третья прямая на $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ в пучке параллельных прямых, содержащем l и m.]

(3) Рассмотрим на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ тройку параллельных прямых l, m и n и какую-нибудь их секущую s. Рассмотрим какую-нибудь геометрическую реализацию этой системы Штейнера на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ и обозначим теми же буквами соответствующие прямые в $\mathbb{P}^2$. Тогда в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$ точки $\check{l}$, $\check{m}$, $\check{n}$ и $\check{s}$ являются четверкой точек в общем положении, поэтому мы можем выбрать проективную систему координат так, чтобы эти точки в $\check{\mathbb{P}}^2$ имели координаты соответственно $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$.
Покажите, что при таком выборе координат девять точек системы Штейнера будут однозначно определены: координаты трех точек на секущей s будут всевозможными перестановками чисел 0, 1 и -1, а координаты остальных шести точек будут всевозможными перестановками чисел 0, 1 и $-\varepsilon$.