Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задачи с 7 занятия.

Решения этих задач предполагается обсудить на следующем занятии.

(1) Числа Фибоначчи f_n определяются тем, что $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Докажите, что если $p \neq 5$ — простое число, то $f_p \equiv \pm 1 \pmod{p}$, причем $+1$ будет в случае, когда 5 является квадратом в поле $\mathbb{F}_p$, а -1 — когда 5 не является квадратом в поле $\mathbb{F}_p$.

(2) Придумайте вывод формулы включений-исключений из полученной на занятии формулы для функции Мебиуса для ЧУМа 2^Ω (частично упорядоченное множество всех подмножеств конечного множества Ω): если $A \subset B \subset \Omega$, то $\mu(A, B) = (-1)^{|B \setminus A|}$, если $A \not\subset B$, то $\mu(A, B) = 0$.

(3) В связи с тем, что 3-я задача прошлого задания была сформулирована неверно, она предлагается еще раз в исправленной формулировке. Покажите, что если неприводимый многочлен $t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{F}_p[t]$ является минимальным многочленом образующей мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_{p^n}^*$, то его свободный член a_n является образующей мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_p^*$.