Теория функций комплексного переменного - 2025
листок 6

1. Разложите в ряд Тейлора следующие функции и найдите области сходимости рядов:

(а) $f(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$ в точке $z=0$,

(б) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+5}$ в точке $z=1$,

(в) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ в точке $z=0$ (эта функция называется *функцией Кёбе*. На что она отображает единичный диск?),

(г) $f(z) = \sin^2 z$ в точке $z=0$,

(д) $f(z) = \dfrac{e^z-z-1}{z^2}$ в точке $z=0$,

(е) $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{e^t-1}{t}\,dt$ в точке $z=0$.

2. Пусть голоморфная в некотором круге с центром в нуле функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $f(z) = z + f(z^2)$. Найдите разложение $f(z)$ в ряд и область сходимости ряда.

3. Найдите $f'''(0)$, где $f(z) = e^{\sin z}$.

4. Найдите радиусы сходимости рядов:

(а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, z^n$, (б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n$, (в) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, (г) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n$,

(д) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$.

5. Найдите суммы рядов $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

6. Докажите, что в разложении $\dfrac{z}{e^z-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n$ все коэффициенты B_n (числа Бернулли) с нечетными номерами равны 0 кроме B_1 и найдите радиус сходимости ряда.

7. Для любого $a \in \mathbb{C}$ положим $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$ (символ Похгаммера).

(а) Определите радиус сходимости ряда

$$F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n}\, z^n.$$

(б) Докажите, что функция $F = F(a,b;c;z)$, задаваемая этим рядом, удовлетворяет дифференциалному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dF}{dz} - abF = 0.$$

Функция $F(a, b; c; z)$ называется *гипергеометрической функцией.*

(в) Найдите второе решение гипергеометрического дифференциального уравнения в предположении, что оно имеет вид $z^\alpha f(z)$, где α – константа, а $f(z)$ голоморфна в 0.

8. Найдите все особые точки и определите их характер у следующих функций: (а) $\dfrac{1}{1-\sin z}$, (б) $\dfrac{z}{\sin(z^3)}$, (в) $\operatorname{ctg}(1/z)$, (г) $\dfrac{1}{e^{z^2}+1}$, (д) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$, (е) $\dfrac{z^3}{\sin^2 \frac{\pi}{z+1}}$.