ПК4◇1. Найдите все целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} -144x_1 - 232x_2 - 264x_3 - 112x_4 = -48 \\ 79x_1 + 124x_2 + 139x_3 + 59x_4 = 34 \\ 22x_1 + 36x_2 + 42x_3 + 18x_4 = 4\,. \end{cases}$$

ответ: матрица $R_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & -10 & -7 \\ -2 & -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$, приведённая матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, решения исходной системы: $\begin{pmatrix} -3z_1 - 8 & 5z_1 + 18 & -7z_1 - 24 & 10z_1 + 30 \end{pmatrix}$.

ПК4◇2. Подрешётка в $\mathbb{Z}^3$ порождается столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} -868 & 478 & -120 & -34 \\ -306 & 168 & -42 & -12 \\ 50 & -26 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** её инвариантные множители **б)** взаимный базис $\mathbb{Z}^3$ и этой подрешётки.

ответ: инвариантные множители: -2, 6, взаимный базис образован, например, столбцами матрицы $L^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 11 & -9 \\ 9 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующая матрица $L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ПК4◇3. Найдите нормальную форму Смита D_A и такие обратимые квадратные матрицы L_A и R_A, что $D_A = L_A A R_A$, для следующих целочисленных матриц A: $\begin{pmatrix} -97 & 49 & 1 & 4 \\ 44 & -21 & -15 & -9 \\ -62 & 35 & -43 & -19 \end{pmatrix}$.

ответ: $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $R_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -15 \end{pmatrix}$.

ПК4◇4. Сколько элементов в абелевой группе с образующими a_1, a_2, a_3, a_4, связанными соотношениями

$$5a_1 - 4a_2 = 0$$
$$7a_3 + 3a_4 = 0$$
$$-4a_2 + 7a_4 = 0$$
$$5a_1 - 4a_2 - 9a_3 + a_4 = 0\,?$$

ответ: 680.

ПК4◇5. Обозначим через $g(A)$ минимальное количество элементов, которыми порождается абелева группа A. Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка 36, укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.

ответ: $g = 2$ у 3 групп порядка $36 = 3^2 2^2$.

ПК4◇6. Обозначим через $g(A)$ минимальное число порождающих абелевой группы A. Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка 58800.

ответ: 4; $58800 = 2^4 3^1 5^2 7^2$.

ПК4◇7. Является ли ортогональным линейный оператор $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном ортонорамльном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 2/15 & 11/15 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 14/15 & 2/15 & 1/3 \end{pmatrix}$?

Если нет, объясните, почему. Если да, то выясните, поворот это или композиция поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота, найдите направление оси и косинус угла поворота.

ОТВЕТ: в (б) нет, в (а) — поворот, направление оси $(0, 1, 1)$, косинус угла $\frac{1}{3}$, в (в) композиция поворота с отражением, направление оси $(-2, 4, 1)$, косинус угла $\frac{2}{5}$.

ПК4⋄8. Является ли унитарным линейный оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющий в стандартном ортонорамльном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1/3 + 2i/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 - 2i/3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Если нет, объясните, почему. Если да, то выясните, принадлежит ли этот линейный оператор группе SU_2? Для матрицы SU_2 найдите косинус угла поворота для образа этой матрицы при гомоморфизме $SU_2 \to SO_3$.

ОТВЕТ: в (б) нет, в (а) — SU_2, в образе косинус угла $-\frac{7}{9}$, в (в) U_2.