ПРОМЕЖУТОЧНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

Для получения максимальной оценки не нужно решать все задачи. Формула оценки такова:

$$\min\{10, \frac{1}{8}\cdot(\text{сумма набранных баллов})\}.$$

Решения принимаются не позднее 31 марта 23:59 по московскому времени. Решения присылаются на почту vomedvedev@hse.ru. Допускается пользоваться различными источниками (книги, статьи). В этом случае укажите ссылку на источник (ссылки на интернет-форумы не принимаются). Оформление работы свободное: письменно (аккуратно, чтобы было читаемо) и сделать фотографии, использование LaTeX. Решения задач строго индивидуальные!

1. (5 баллов) Пусть M – гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, на которую индуцируется метрика g. Пусть нормальное расслоение NM тривиально. Докажите сокращенное уравнение Гаусса

$$R_{\overline{g}} = R_g + 2\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu,\nu) + |B_M|^2_{\overline{g}} - H_M^2,$$

где B_M – вторая квадратичная форма M, H_M – средняя кривизна M в $(\overline{M}, \overline{g})$.

2. (5 баллов) Пусть M – гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$. Докажите сокращенное уравнение Кодацци

$$\mathrm{div}_M B_M - dH_M = \mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu,\cdot),$$

где div_M – дивергенция на M с индуцированной с $\overline{g}$ метрикой.

3. (7 баллов) Пусть метрики $\widetilde{g}$ и g на M^n, $n>2$ конформны, т.е. существует функция $u \in C^\infty(M)$ такая, что $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$. Докажите, что

$$R_{\widetilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g u.$$

4. (3 балла) Докажите, что подмногообразие риманова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

5. (3+1+1+2 баллов) а) Докажите, что плоскость, катеноид и геликоид являются минимальными поверхностями в $\mathbb{E}^3$.

б) Докажите, что экваториальные сферы в круглой n-мерной сфере являются вполне геодезическими гиперповерхностями.

в) Докажите, что горизонт в пространстве Шварцшильда является вполне геодезической гиперповерхностью.

г) Докажите, что круглые сферы в $\mathbb{E}^n$ являются вполне омбилическими подмногообразиями.

6. (15 баллов) Докажите, что под действием потока эквидистантных гиперповерхностей вдоль поля $X = \varphi\nu$ с начальной гиперповерхностью M в $(\overline{M}^n, \overline{g})$ средняя кривизна меняется по закону

$$\frac{\partial H_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\Delta_M\varphi - (\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\nu,\nu) + |B_M|^2_{\overline{g}})\varphi + \nabla_X \vec{H}_t.$$

7. (20 баллов) Докажите, что при деформации метрики $g_t = g + ht$ скалярная кривизна $R_t := R_{g_t}$ на многообразии M^n меняется по закону

$$\frac{\partial R_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\Delta_g(\mathrm{tr}_g h) + \mathrm{div}_g(\mathrm{div}_g h) - \langle \mathrm{Ric}_g, h\rangle_g,$$

где $\operatorname{div}_g(\operatorname{div}_g h) := \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} h_{ij}$ (следуйте указаниям к упражнению 1.18 в D. Lee. Geometric Relativity).

8. (5 баллов) Докажите, что многообразие Шварцшильда массы m является асимптотически шварцшильдовским (и, следовательно, асимптотически плоским) с двумя концами, каждый из которых имеет массу m.

9. (10 баллов) Докажите, что для всякого пространства-времени $(N, \mathfrak{g})$ верно следующее:
в) $Int(J^+(S)) = I^+(S)$;
г) $J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$.

10. (20 баллов) Придумайте пространство-время, для которого выполнено условие хронологичности, но не выполнено условие причинности. Ответ поясните!

11. (3+4 баллов) а) Докажите, что существует такая радиальная координата s на $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, что метрика Шварцшильда принимает вид

$$g_m = \left(1 + \frac{m}{2s^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} (ds^2 + s^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

Такие координаты называются *изотропными*.

б) Покажите, что отображение $s \mapsto \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{n-2}} s^{-1}$ является изометрией метрики g_m из пункта а) и выведите отсюда, что $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ с метрикой g_m полно.

12. (5 баллов) Изучите набросок доказательства Леммы 8.1.5 в книге R. M. Wald. General Relativity и приведите её строгое доказательство: пусть $(\gamma_n)_n$ – последовательность причинных кривых, непродолжимых в будущее, проходящих через точку p пространства-времени $(N, \mathfrak{g})$. Тогда существует непродолжимая в будущее причинная кривая, проходящая через p, являющаяся при этом предельной кривой для $(\gamma_n)_n$.

13. (5 баллов) Выведете уравнение Рейчаудхури из уравнения Рикатти для изотропных порождающих: пусть γ – изотропная порождающая изотропной гиперповерхности $\mathcal{H}$ с нормальным вектором $l = \dot\gamma$ в пространстве-времени $(N, \mathfrak{g})$, тогда эволюция изотропной средней кривизны θ гиперповерхности $\mathcal{H}$ вдоль γ удовлетворяет уравнению

$$\dot\theta = -\frac{1}{n-1}\theta^2 - |\mathring{S}|^2_{\mathfrak{g}} - \operatorname{Ric}_{\mathfrak{g}}(l, l),$$

где $\mathring{S}$ – бесследовая часть оператора формы S, т.е. $\mathring{S} = S - \frac{1}{n-1}\theta \operatorname{Id}$, а Id – тождественный оператор на касательных к $\mathcal{H}$ векторных полях.

14. (5 баллов) Пусть (M^n, g, K) – начальные данные для пространства-времени $(N^{n+1}, \mathfrak{g})$. Рассмотрим гиперповерхность Σ^{n-1} в M. Пусть ν – внешняя единичная нормаль к Σ в (M, g), а $\vec{n}$ – нормаль к M в $(N, \mathfrak{g})$, направленная в будущее и $\mathfrak{g}(\vec{n}, \vec{n}) = -1$. Определим $l_\pm$ как $\vec{n} \pm \nu$. Докажите, что

$$\theta^\pm = \operatorname{tr}_g K \pm H,$$

где H – средняя кривизна Σ в (M, g). В частности, если выполнено условие временной симметричности $K = 0$, то $\theta^\pm = \pm H$.

15. (10 баллов) Заполните пробел в доказательстве теоремы Пенроуза о неполноте: если $p \in \Omega$, то существует причинная кривая, исходящая из точки p', находящейся в окрестности точки p, которая времени подобна в некоторой окрестности точки p' и проходит через точку $q \in J^+(\overline{\Omega}) \setminus I^+(\overline{\Omega})$.